

Exercice 1 :.....(5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 6z^2 + (12 - i)z - 9 + 3i$.

- 1) Démontre qu'il existe un réel α tel que : $P(z) = 0$.
- 2) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$.
- 3) Résous $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
- 4) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $3, 2 + i$ et $1 - i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b) Démontre qu'il existe une unique similitude directe S de centre C, qui transforme A en B.
 - c) Détermine les éléments caractéristique de S.

Exercice 2 :.....(5 points)

I// On pose $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

1) A l'aide d'une intégration par partie exprime I en fonction de J.

2) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) En déduis J.

3) Calcule la valeur exacte de I.

II// Soient les équations différentielles $(E) : y' - 2y = xe^x$ et $(E') : y' - 2y = 0$.

- 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E) .
- 2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E') .
- 3) Résous l'équation (E') . En déduis l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Problème :.....(10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative sur un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

- 1) Etudie les variations de g .
- 2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que : $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.
- 3) En déduis le signe de g suivant les valeurs de x .

Partie B :

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
- 3) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 4) Démontre que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$.
- 5) a) Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
b) Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
- 6) Détermine une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
- 7) Trace $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

Partie C :

- 1) Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$.
- 2) a) Calcule en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 de la partie limitée par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.
b) Calcule la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.