

Exercice 1 :(6 points)

Soit P polynôme défini par : $P(z) = z^3 + (1 - 9i)z^2 - (24 + 6i)z - 14 + 18i$.

1) a) Vérifie que : $P(z) = (z + 1 - 5i)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$.

b) En déduis dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 5i$; $z_B = 1 + 3i$ et $z_C = -1 + i$.

a) Construis le triangle ABC .

b) Calcule $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$, puis en déduis la nature du triangle ABC .

c) On note I milieu du segment $[AC]$, détermine l'afixe z_I du point I .

3) Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan d'afixe z tels que : $|z + 1 - 3i| = 2$.

4) Soit f une similitude plane directe de centre A et qui transforme C en B .

Détermine l'expression complexe de f , puis détermine le rapport k et la mesure de l'angle θ de f .

Exercice 2 :(4 points)

I// Détermine la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ c) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^3$.

II// Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5+2x}-3}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

III// On donne :
$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 3x + r & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4x+1}{4x} & \text{si } x > 1; \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Détermine le nombre réel r pour que la fonction f soit continue en x_0 .

Problème :(10 points)

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.

3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2 cm)

1) Calcule la limite de f en $-\infty$, 0 et en $+\infty$.

2) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f .

3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudie les positions relatives de (D) par rapport à (C) .

4) Détermine les coordonnées du point A où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D) .

5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6) Démontre que $f(\alpha) = \frac{-4\alpha+3}{\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$.

7) Construis les droites (D) et (T) , puis la courbe (C) .