

Exercice 1 :(5 points)

I/ Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations a , b , c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

- 1) z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le module de z est égal à...
a) $a^2 + b^2$; **b)** $\sqrt{a^2 + b^2}$; **c)** $a^2 - b^2$; **d)** $|a + b|$.
- 2) Une primitive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est la fonction F définie par :...
a) $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$; **b)** $F(x) = -\ln(\sin x)$; **c)** $F(x) = \ln(\sin x)$; **d)** $F(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x)^2}$.
- 3) Soit Ω un point du plan. L'homothétie de centre Ω et de rapport -3 est une similitude directe de centre Ω , de ...
a) rapport -3 et d'angle 0 ; **b)** rapport -3 et d'angle π ; **c)** rapport 3 et d'angle π ; **d)** rapport 3 et d'angle 0 .
- 4) Si A , B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B et z_C telles que: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3}$, alors...
a) ABC est un triangle rectangle en A ; **b)** ABC est un triangle isocèle en A ;
c) ABC est un triangle rectangle isocèle en A ; **d)** les points A , B et C sont alignés.
- 5) L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \ln(1 - x) < 2$ est...
a) $]1; e^2 - 1[$; **b)** $]-\infty; 1 - e^2[$; **c)** $]e^2 - 1; 1[$; **d)** $]e^2 - 1; +\infty[$.

II/ Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de **Vrai** si l'énoncé est vrai ou de **Faux** si l'énoncé est faux.

- 1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et F une primitive de f sur K .
 Les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur K .
- 2) Si f est négative sur l'intervalle $[a; b]$, alors l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(t)dt$.
- 3) Les solutions de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) sont de la forme :
 $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$).
- 4) La fonction $\ln x$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- 5) La fonction $\ln x$ est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Exercice 2 :(5 points)

Soit P polynôme défini par : $P(z) = z^3 + (1 - 9i)z^2 - (24 + 6i)z - 14 + 18i$.

- 1) a) Détermine le nombre complexe non nul z_0 tel que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$.
b) Vérifie que : $z^2 - 4iz - 4 - 2i = (z + 1 - i)(z - 1 - 3i)$.
c) On pose $z_0 = -1 + 5i$.
 En déduis les solutions dans de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + 5i$; $z_B = 1 + 3i$ et $z_C = -1 + i$.
a) Construis le triangle ABC .
b) Montre que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ puis en déduis la nature du triangle ABC .
c) On note I milieu du segment $[AC]$, détermine l'affixe z_I du point I .
- 3) Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan d'affixe z tels que : $|z + 1 - 3i| = 2$.
- 4) Soit f une similitude plane directe de centre A et qui transforme C en B .
a) Détermine l'expression complexe de f .
b) Détermine le rapport k et la mesure de l'angle θ de f .

Problème :.....(10 points)

Partie A

Soit k la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $k(x) = -x^4 + 1 - 3 \ln x$.

1) Calcule les limites de k en 0 et en $+\infty$.

2) Etudie le sens de variation de k .

3) Dresse le tableau de variation de k .

Calcule $k(1)$. En déduis le signe de $k(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Détermine la limite de f en 0. Interprète graphiquement ce résultat.

2) Détermine la limite de f en $+\infty$.

3) a) Montre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = -x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

b) En déduis la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

4) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{k(x)}{x^4}$.

En déduis le sens de variation de f .

5) Dresse le tableau de variation de f .

6) Détermine en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

7) Trace la droite $(\mathcal{D})$ et construis la courbe $(\mathcal{C}_f)$.