

EXERCICES D'ESSAI AU BAC SESSION 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées

EXERCICE 1 (4pts)

Soit le polynôme $p(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i$

1. Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet deux racines imaginaires pures .
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$, puis donner les solutions sous forme exponentielle .
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité :1cm)
On note $a = -i$; $b = i$ et $c = 1 - i$.

a .Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure .

On notera $A; B$ et C les points d'affixes respectives a, b et c

b . Calculer $\frac{a-b}{a-c}$, puis préciser la nature du triangle ABC .

c .Soit C l'image du point D par la translation t du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer l'affixe du point D .

d .Soit E l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe du point E .

e . Pour quelles valeurs de n , c^n est-il réel ?

EXERCICE 2 (4pts)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif.

Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapide possible en utilisant un moyen de transport et un parcours adapté .

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au touché . Sur le premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R , sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L .

Un concurrent tire au hasard un jeton .

- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V , il effectuera le trajet à vélo,
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R , il effectuera le trajet en roller,
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P , il effectuera le trajet à pied,
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L , il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents .

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L , il choisit le vélo dans 70% des cas , il choisit le roller dans 20% des cas, et il décide de faire le parcours à pied dans 10% des cas .

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation .
(Pour les questions suivantes, on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à pied .
3. sachant qu'un concurrent à effectuer le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L .
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendantes des uns des autres .
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.
Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par le concurrent $\ll \text{non cycliste} \gg$.

PROBLÈME (12pts)

On considère la fonction f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1 - e^{2x}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D son domaine de définition et par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm)

1. a. déterminer D .
b. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
c. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
2. a Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
b. Étudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus .
3. Étudier le sens de variation de f sur $] -\infty; 0[$.
4. a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
b. Déterminer le sens de variation de f' . Dédire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. Étudier la position relative de (C) et la droite (D) d'équation : $y = 2$.
7. Construire (C) .
8. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , les droites d'équations $y = 2$, $x = \alpha$ et $x = \frac{2}{e-1}$
 - a. Calculer $A(\alpha)$
 - b. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat obtenu ?