

SUJET 3

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 2points

Un lot de vaccin est efficace à 55%, c'est -à-dire sur 100 personnes vaccinées, 55 seulement sont sûres d'être protégées contre la maladie. On vaccine 10 personnes avec ce produit. Quelle est la probabilité pour que :

- a) Aucune des personnes ne soit protégée ? 0,75pt
- b) La moitié des personnes soient protégées ? 0,75pt
- c) Les 10 personnes soient protégées ? 0,5pt

Exercice 2 : 4points

Pour tout n de $\mathbb{N}$ et x de $\mathbb{R}$, on note f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^x}$.

On définit la suite (u_n) par son terme général $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1.a) Démontrer que la suite (u_n) est définie à termes positifs. 0,5pt
- b) Calculer u_1 et $u_0 + u_1$. En déduire la valeur exacte de u_0 . 1pt
- c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $u_n + u_{n+1}$ en fonction de n . 0,5pt
- 2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5pt
- b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ de l'intervalle $[0, 1]$;

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2} e^{nx}.$$
 0,75pt
- c) En déduire un encadrement de u_n . 0,25pt
- 3. Déduire de la question 2.b) la limite de u_n , puis celle de $\frac{u_n}{e^n}$. 0,5pt

Exercice 3 : 4points

On considère s la transformation du plan qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel

que :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Soient $z = x + iy$ l'affixe du point M et $z' = x' + iy'$ l'affixe du point M' .

- 1. a) Écrire z' en fonction de z . 0,75pt
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de s . 1pt
- 2. Déterminer l'image (D') de la droite (D) d'équation $y = x + 1$. 0,75pt
- 3. Écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, puis en déduire la forme trigonométrique de $(1 + i\sqrt{3})^n$. Pour quelle valeur de n (entier naturel) $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un réel. 1,5pt

Problème :10points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

Partie A : 3points

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = e^{-2x}$$

1. Vérifier que la fonction $g: x \mapsto (x + 1)e^{-2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E). **1pt**
2. Démontrer qu'une fonction $g + f$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$. **1pt**
3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E). **1pt**

Partie B : 7points

On note :

h la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x .$$

k fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$k(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x} .$$

(C) la courbe représentative de k dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.a) Déterminer les limites de h à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**
 - b) Calculer la dérivée de h et en déduire le tableau de variations de h . **1pt**
- 2.a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $I =]1, 2[$. **0,5pt**
 - b) Préciser le signe de $h(x)$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$. **0,5pt**
- 3.a) Déterminer les limites de k à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**
 - b) En déduire les asymptotes de (C). **0,5pt**
 - c) Calculer la dérivée de k et démontrer que , pour tout x de $]0, +\infty[$ $k'(x)$ a le même signe que $(2x + 1) h(x)$. **1pt**
4. Dresser le tableau de variation de h dans l'intervalle $]0, +\infty[$. **0,5pt**
- 5.a) Démontrer que $k(\beta) = \frac{2}{\beta(2\beta+1)}$. **0,5pt**
 - b) On note A le point de (C) rencontre de avec l'axe des abscisses ; écrire une équation cartésienne de la droite (D) tangente à (C) en A. **0,5pt**
 - c) Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe (C) . (unités sur les axes : 1,5cm). **1pt**