

LYCEE DE BANGOULAP
BACCALAUREAT D BLANC

Classe :	TERMINALE D	Durée :	4 heures	Année scolaire :	2019/2020
Épreuve :	MATHÉMATIQUES	Coef. :	4	Par	DJOUTSOP Emile

EXERCICE 1: (03,75 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $P(z) = z^3 + (1-3i)z^2 - 7iz - 6 - 22i$.

- 1- Calculer $P(-1-2i)$. 0,5 pt
- 2- Déterminer trois nombres complexes a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z ,
 $P(z) = (z+1+2i)(az^2+bz+c)$. 0,75 pt
- 3- a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $15+18i$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation
 $(E): z^2 - 5iz - 10 - 2i = 0$. 0,5 pt
 b) En déduire dans $\mathbb{C}$ l'ensemble solution de l'équation $P(z) = 0$. 0,5 pt
- 4- On considère les points Ω et A d'affixes respectives $2+3i$ et $-2+2i$. Démontrer que l'affixe b du point B tel le triangle $B\Omega A$ soit rectangle isocèle en A et de sens direct est $b = -1-2i$. 0,5 pt
- 5- On considère la transformation S du plan d'expression analytique $\begin{cases} x' = -2x - 2y + 11 \\ y' = 2x - 2y + 5 \end{cases}$. Déterminer l'écriture complexe de S , sa nature et ses éléments caractéristiques. 1 pt

EXERCICE 2: (05 points)

A) Le tableau suivant donne la production y_i en tonnes en fonction de la taille x_i , en hectares de l'exploitation, pour un ensemble de six exploitations d'une localité d'un pays.

x_i (en ha)	1	2	3	4	5	6
y_i (en t)	12	30	42	60	48	54

- 1- Construire le nuage de points associé à cette série double. (On prendra 1 cm pour un hectare en abscisse et 1 cm pour 10 tonnes en ordonné) 0,75 pt
- 2- Déterminer le point moyen G et le placer. 0,75 pt
- 3- Calculer la variance de x et la covariance de x et y . 1 pt
- 4- Donner une équation cartésienne de la droite de régression de y en x . 0,5 pt
- 5- Donner une estimation de la production d'un domaine de 8 hectares. 0,25 pt
- B) Dans cette localité, il y'a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
 - La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.
 - La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97.

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V

l'évènement "la personne est contaminée par le virus" et T l'évènement "le test est positif". $\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T .

- 1- Préciser les valeurs des probabilité suivantes : $p(V)$; $p_V(T)$; $p_{\bar{V}}(T)$. 0,75 pt
- 2- En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$. 0,5 pt
- 3- Démontrer que la probabilité que le test soit positif est de 0,0492. 0,5 pt

PROBLEME : (11,25 points)

PARTIE A : 02 points

On considère les équations différentielles : $(E_1): y'' + 2y' + y = 0$ et $(E_2): y'' + 2y' + y = x + 3$

- 1- Déterminer un polynôme $u(x)$ de degré un, solution de l'équation différentielle (E_2) . 0,5 pt
- 2- Montrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si et seulement si $g - u$ est solution de (E_1) . 0,5 pt

- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) , puis en déduire les solutions générales de l'équation différentielle (E_2) . 0,5 pt
- 4- Déterminer la solution g de (E_2) telle que $g(0)=1$ et l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 admet pour coefficient directeur le réel 2. 0,5 pt

PARTIE B : 05,75 points

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$, (C_f) est sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

- 1- a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$. 0,5 pt
- b) Etudier les variations de f' . 0,5 pt
- c) Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. 0,25 pt
- d) Calculer la limite de f en $+\infty$. 0,25 pt
- e) Dresser le tableau de variations de f . 0,25 pt
- 2- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) et préciser les positions relatives de (D) et (C_f) . 0,75 pt
- b) La courbe (C_f) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D) . Déterminer les coordonnées du point A . 0,5 pt
- 3- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$. 0,5 pt
- 4- Construire la courbe (C_f) , la droite (D) et la tangente (T) au point A . 1 pt
- 5- On pose $I_\alpha = \int_0^\alpha xe^{-x} dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_α . 0,5 pt
- b) Soit D le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine D . 0,5 pt
- c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\alpha)$. 0,25 pt

PARTIE C : 3,5 points

- 1- Démontrer que sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ est équivalente à $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$. 0,5 pt
- 2- On définit sur $[0,1]$ la fonction $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- a) Calculer $h'(x)$, puis établir le tableau de variation de h . 0,5 pt
- b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$; $h(x) \in [0,1]$. 0,25 pt
- c) Calculer $h''(x)$ et étudier les variations de h' . 0,5 pt
- d) Déduire que pour tout $x \in [0,1]$; $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$. 0,5 pt
- 3- On donne la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. 0,25 pt
- b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$. 0,5 pt
- c) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis en déduire la limite de u_n .