

Exercice 1 : PROBABILITÉ 4points

On lance deux dés non pipés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le gagnant est celui qui obtient deux numéros consécutifs (croissants ou décroissant). A priori la probabilité que ton adversaire soit un tricheur est égale à x .

- 1) Il commence et il obtient deux numéros consécutifs. **(2 point)**

Montrer que la probabilité que ce soit un tricheur est $\frac{18x}{13x+5}$

- 2) Dans cette partie, On part jusqu'à n lancers

Il gagne deux numéros consécutifs au n -ième lancer

Montrer que la probabilité que ce soit un tricheur est $\frac{x}{x + \frac{5}{18}(1-x)(\frac{13}{18})^{n-1}}$ **(2 point)**

Exercice 2 : NOMBRES COMPLEXES 6points

On considère par P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - (2 + e^{i\alpha})z^2 + (1 + 2e^{i\alpha} - e^{i2\alpha})z - e^{i\alpha} + e^{i3\alpha}$$

- 1) Calculer $P(e^{i\alpha})$ **(0,5 point)**
- 2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ du second degré tel que : $P(z) = (z - e^{i\alpha})Q(z)$ **(0,5 point)**
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{i2\alpha} = 0$ **(0,75 point)**
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$ **(0,25 point)**
- 5) On donne $z_1 = e^{i\alpha}$; $z_2 = 1 + e^{i\alpha}$ et $z_3 = 1 - e^{i\alpha}$
 - a) Déterminer le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3 **(1,5 point)**
 - b) Calculer $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$ **(0,25 point)**
 - c) On pose $A(Z_1)$, $B(Z_2)$ et $C(Z_3)$

Pour quelles valeurs de α :

- ABC est-il un triangle rectangle en B **(0,25 point)**
- A ; B et C sont alignés **(0,25 point)**

- 6) On pose $\alpha = \frac{\pi}{3}$

- a) Donner les affixes respectives de A, B et C **(0,75 point)**
- b) Représenter A, B et C dans un plan complexe rapporté à un repère (O ; U ; V) unité graphique 2cm **(0,25 point)**
- c) Montrer que $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires **(0,25 point)**
- d) Montrer que $d(O, C) = d(A, B)$ **(0,25 point)**
- e) En déduire la nature du quadrilatère OABC **(0,25 point)**

PROBLEME : FONCTION 10 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2cm)

- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Calculer $f'(x)$. **(0,5 point+0,5point+1point)**

- 2) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 3 + \ln x$.

- a) Etudier les variations de g . **(1,5 point)**
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2; 3]$. **(0,5 point)**
- c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$. **(1 point)**

- 3) Dresser le tableau de variation de f .

- 4) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. **(1 point)**

- 5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. **(1,5 point)**

- 6) Soit h la restriction définie sur $]0; +\infty[$, par : $h(x) = -f(x)$.

- a) Donner le tableau de variations de h . **(1,5 point)**
- b) Sans étudier la fonction h , construire sa courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$. **(1 point)**