

PROFIL : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Sujet

Exercice1 Soit $P(z) = Z^3 - (7 + 3i)Z^2 + (12 + 15i)Z - 4 - 18i$.

1) Vérifier que $z_0 = 2$ est une racine de P.

2-a) Déterminer le réel a tel que $P(Z) = (Z - 2)(Z - 4 - i)(Z - a)$.

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

3) On considère les points A, B et D d'affixes respectives :

$$Z_A = 2, \quad Z_B = 4 + i \text{ et } Z_D = 1 + 2i.$$

a) Ecrire $U = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$ sous la forme algébrique.

b) En déduire que le triangle ABD est isocèle rectangle en A.

4-a) Montrer que l'expression complexe de la similitude plane S de centre B qui transforme D en A est :

$$Z' = \frac{1}{2}(1 + i)Z + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i.$$

b-) Déterminer le rapport et l'angle de S.

Exercice2

Pour tout entier naturel n , on définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{2x} dx$.

1-) Calculer U_n en fonction de n .

2-) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme

3-) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2n}$

4-) On pose $V_n = e^{U_n} \quad \forall n \geq 1$.

a-) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b-) Calculer $P_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{2n}$

Exercice3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 2 + 4 \ln(x + 2) - 4 \ln x$.

1-a) Montrer que pour tout x de D_f : $f(x) = x - 2 + 4 \ln(1 + \frac{2}{x})$, puis Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f) .

c) Etudier la position de (D) par rapport à C_f .

2-a) Calculer la dérivée de f et montrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x(x+2)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer (C_f) .

4) On considère la fonction F définie par

$$F(x) = -2x^2 + 2x + 4(x + 2) \ln(x + 2) - 4x \ln x.$$

a) Montrer que F est une primitive de f .

b) Calculer l'aire en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.