

Exercice 1: (03,5 pts)

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Soient les intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$.

1. Calcule $A + B$ et $A - B$. (1,5 pt)

2. En déduis les valeurs de A et de B . (0,5 pt)

Partie B

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ et on désire trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} pour tout entier naturel n .

1. Calcule I_0 . (0,25 pt)

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontre que $(2n+5)I_{n+1} = (2n+2)I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (0,5 pt)

3. En déduis I_1, I_2 et I_3 . (0,75 pt)

Exercice 2: (04,5 pts)

Soient les équations différentielles

$$(E) : y'' - 2my' + 3y = 2(1-2x)e^x \text{ et } (E') : y'' - 2my' + 3y = 0$$

où m est un paramètre réel.

1. Résous suivant les valeurs de m , l'équation (E') . (0,5 pt)

2. Détermine m pour que la fonction $h : x \mapsto x^2 e^x$ soit solution de (E) . (0,5 pt)

3. Dans cette question on prend $m = 2$.

(a) Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montre que si φ est une solution de (E) , alors $\varphi - h$ est solution de (E') . Montre que si $\varphi - h$ est une solution de (E') alors φ est solution de (E) . (0,5 pt)

(b) En déduis la résolution de (E) . (0,5 pt)

(c) Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, détermine la solution f de (E) dont la représentation graphique passe par le point $\omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1. (0,5 pt)

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$, ainsi qu'une primitive U sur $\mathbb{R}$ de la $x \mapsto 2(1-2x)e^x$.

(a) Sachant que g est solution de (E) montre que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(b) Montre que pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des réels à préciser puis déduis l'expression de G . (0,5 pt)

Problème: (12 pts)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \begin{cases} xe^x - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x[-1 + \ln(x)] & \text{si } x > 0 \end{cases}$ dont la représentation graphique est (C_f) .

Partie A (03 pts)

Soit g la fonction définie sur $] -\infty, 0]$ par $g(x) = xe^x - x$.

(0,5 pt)

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $] -\infty, 0]$, calcule la dérivée première $g'(x)$ et la dérivée seconde $g''(x)$ de g . (1 pt)
(b) Démontre que la courbe représentative (C_g) de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées. (0,75 pt)
(c) Dresse le tableau de variation de la fonction g' puis déduis-en le signe de $g'(x)$. (0,75 pt)

Partie B (04,5 pts)

(0,5 pt)

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? (0,5 pt)
2. Démontre que f est continue en 0. (0,75 pt)
3. (a) Étudie la dérivabilité de f puis déduis-en une interprétation graphique. (0,75 pt)
(b) Calcule la dérivée $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis étudie son signe. (0,5 pt)
4. Dresse le tableau de variation de f . (0,5 pt)
5. On pose $J = [1, +\infty[$ et on définit l'application $\varphi : J \rightarrow f(J)$, $x \mapsto \varphi(x) = f(x)$.
(a) Démontre que l'application φ est bijective. (0,75 pt)
(b) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ . Démontre que la dérivée première $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J)$. (0,75 pt)

Partie C (04,5 pts)

1. Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$. (0,5 pt)
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on conclure? (0,5 pt)
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = -f(x)$ de courbe représentative (C_h) . Construis les courbes (C_f) et (C_h) et les tangentes en 0 à la courbe (C_f) dans un même repère. (1,25 pt)
4. Soit $H(x) = \int_1^x h(t)dt, \forall t \in J$.
(a) Justifie que la fonction H est définie et continue sur J . (0,5 pt)
(b) Calcule $H(e)$ puis déduis-en une interprétation géométrique. (0,75 pt)
(c) Calcule en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. (1 pt)