

ANNEE SCOLAIRE 2001 2002

COMPOSITION DE LA 2ème PERIOD

LYCEE BOUILLAGUI FADIGA
MATHEMATIQUES

EPREUVE DE

SERIE: SBT

COEF : 4

DUREE : 3H

EXERCICE 1On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$$

- 1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 . Factorisez $f(z)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixe respectives z_1 ; z_2 ; z_3 (z_3 étant la troisième solution de l'équation). Montrer que ces points sont alignés).

EXERCICE 2On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1. \text{ On pose } V_n = 4U_n - 6n + 15.$$

- 1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
- 2) Exprimer (V_n) en fonction de n . En déduire que pour tout entier n ;

$$U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$$

- 3) Montrer que U_n peut s'écrire $t_n + w_n$ où (t_n) est une suite géométrique et (w_n) une suite arithmétique.
- 4) Calculer $T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.
En déduire $U_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

PROBLEMEA) On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$f(x) = -x + 7 + 6 \ln(2x + 1) - 6 \ln(2x + 2)$. On note par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Justifier que f est définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

- 2) Déterminer la limite de f en $-\frac{1}{2}$. En déduire que la courbe (C) admet pour asymptote une droite (D) dont on précisera une équation.
 - 3) En remarquant que, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$6 \ln(2x+1) - 6 \ln(2x+2) = 6 \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right).$$
 Déterminer la limite de f en $+\infty$
 - 4) Soit (Δ) la droite d'équation $y = -x + 7$
 - a) Quelle est la limite de $[f(x) - (-x + 7)]$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire une interprétation graphique.
 - b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ)
 - 5) a) Montrer que $\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 5}{(2x+1)(x+1)}$$
 où f' désigne la dérivée de f .
 b) étudier le signe de la f' et dresser le tableau de variation de f .
 - 6) Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point M d'abscisse 0. Déterminer une équation de (T) .
 - 7) Tracer les droites (D) ; (Δ) ; (T) et la courbe (C) dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm .
- B) 1) Soit H la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par
- $$H(x) = (2x+1) \ln(2x+1) - (2x+2) \ln(2x+2).$$
- Montrer que la fonction H est une primitive sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ de la fonction h définie sur cet intervalle par $h(x) = 2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$.
- 2) On note (E) la partie du plan comprise entre la courbe (C) la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=5$
 - a) Calculer la valeur exacte de l'aire (E) en unité d'aire.
 - b) Calculer l'aire de (E) en cm^2 .