

COMPOSITION	Deuxième Période				
SÉRIE:	SBT		Mai 2006		
ÉPREUVE DE:	Mathématiques	DURÉE:	3heures	COEF.:	4

Exercice 1 (5pts)

On suppose que le prix des automobiles augmente de 30% par an.

Un véhicule Zélia coûte $P_0 = 90000^f$ le premier janvier 1999.

1°/ a) Calculer le prix P_1 de Zélia au premier janvier 2000. (1pt)

b) On note P_n le prix de ce véhicule au premier janvier de l'année $(1999+n)$. Démontrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. (1pt)

c) Calculer P_n en fonction de n . (1pt)

2°/ En utilisant le logarithme népérien, déterminer au premier janvier de quelle année, le prix de Zélia dépassera pour la première fois 120000^f, puis en quelle année son prix aura doublé. (2pts)

Exercice 2 (5pts)

A°/ Une variable aléatoire Y prend les valeurs 3, 4, 5 et 6.

1°/ Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que : $p(Y > 5) = \frac{1}{2}$;

$p(Y < 5) = \frac{1}{3}$; $P(Y = 3) = p(Y = 4)$. (1pt)

2°/ Calculer l'espérance $E(Y)$ et l'écart type $\sigma(Y)$. (1pt)

B°/ 1°/ Résoudre l'équation différentielle $16y'' + y = 0$. (1pt)

2°/ Déterminer la solution f de cette équation vérifiant : $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = -\sqrt{3}$. (1pt)

3°/ Démontrer que pour tout réel x , on a : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$. (1pt)

Problème (6pts)

1°/ Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$

a) Vérifier que $p(1) = 0$ et factoriser $p(x)$

b) Étudier le signe de $p(x)$ sur les valeurs de x

2°/ Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

a) Déterminer la dérivée g' de g . (0,50pt)

Utiliser 1) pour donner le sens de variation de g . (on ne calculera pas de limite en 0 et en $+\infty$). (0,50pt)

b) Dédire de a) le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (1pt)

3°/ Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal

$\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}$ du plan (unité 2 cm).

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = 0$ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.

(1,25pts)

b) Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe C . (0,50pt)

c) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives. (1pt)

En déduire que (Δ) coupe C en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln \alpha = 0$; Démontrer que $0,56 < \alpha < 0,57$. (0,50pt)

d) Déterminer la position de C par rapport à (Δ) . (0,25pt)

e) Étudier le sens de variation de f (1pt)

En déduire l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$. (0,25pt)

Démontrer que $0,46 < \beta < 0,47$ (0,25pt)

f) Construire C et (Δ) (2pts)