

Sujet :Exercice I :

1<sup>o</sup>) Soit  $g$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

a) Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

b) Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2<sup>o</sup>) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Trouver une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ .

3<sup>o</sup>) En utilisant les résultats obtenus précédemment et la technique d'intégration par parties,

calculer  $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$  où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Exercice II :

1<sup>o</sup>) a) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y'' + 3 \cos 2x - 1 = 0$$

b) Déterminer la solution  $f$  dont la courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est tangente en 0 à l'axe des abscisses.

2<sup>o</sup>) Résoudre l'équation différentielle :

$$y^2 - yy' - 2y'^2 = 0$$

3<sup>o</sup>) Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x} ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(1+x)} ; \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\ln x}{x-2}$$

Problème:

A<sup>o</sup>) On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = \ln(x^2) + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$$

1<sup>o</sup>) Etudier les limites de  $g$  en 0 et  $+\infty$ .

2<sup>o</sup>) a) Soit  $g'$  la dérivée de  $g$ . Calcule  $g'(x)$ .

b) Etudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation.

3<sup>o</sup>) a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$ .

b) Justifier l'encadrement :  $0,1 < \alpha < 2$

c) Donner une valeur approchée décimale à  $10^{-2}$  près par excès de  $\alpha$ .

4<sup>o</sup>) Dédurre de l'étude précédente le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

B<sup>o</sup>) On considère la fonction numérique  $f$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^x \left( \ln(x^2) + \frac{2}{x} \right)$$