

COMPOSITION : 1ère PERIODE

SERIE : TSExp

EPREUVE DE : Mathématiques

2013/2014

DUREE : 3heures

COEF : 03

Exercice 1 : (07 points)

Soit l'équation (E): $iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = 0$; $z \in \mathbb{C}$

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer. (1pt)

2°) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que

$iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = (z - i)(az^2 + bz + c)$. (1,5pt)

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (1,5 pt)

4°) Le plan complexe est muni d'un repère (O, U, V) . Soit les points A, B et C d'affixes respectives $i, 1 + 2i$ et $2 + i$.

a) Placer les points A, B et C. (1pt)

b) Calculer AB, AC, BC , mes($\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$) en déduire la nature du triangle ABC. (1 pt)

c) Déterminer d l'affixe du point D tels que ABCD soit un parallélogramme, puis placer le point D. (1pt).

Exercice 2 : (04 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b et c sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$. (0,5 pt)

2°) Déterminer les réels a, b et c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$. (1,5 pt)

3°) Etudier la fonction f et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ dont on précisera les intervalles. (1,5 pt)

4°) Tracer la courbe (C) de f . (0,5 pt)

Problème : (09 points)

Partie I : (04 points)

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}$

1) Calculer la limite en 1 de la fonction f . (1,5 pt)

2) En déduire une fonction g , prolongement par continuité de f en 1. (1 pt)

B) Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = ax^2 + bx + 1, & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ g(x) = 2ax + b, & \text{si } x \in]2; +\infty[\\ g(2) = -3 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que g soit continue en $x_0 = 2$ (1,5 pt)

Partie II :

Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour, (x exprimé en millier). Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$. L'entreprise vend chaque millier de crayon à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$. (0,5 pt)

2) Montrer que le bénéfice $B(x)$, exprimé en euro est donnée par $B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $x \in [3; 10]$. (On rappelle que $R(x) - C(x) = B(x)$). (0,5 pt)

3) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B . (0,5 pt)

4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3; 10]$. Dresser le tableau de variation de la fonction B . (2 pts)

5) En déduire le nombre de milliers de crayon à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ? (1,5 pt)