

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

2015 - 2016

EPREUVE DE MATHEMATIQUES	SERIE : TSEXP	DUREE : 3 H	COEF : 3
--------------------------	---------------	-------------	----------

EXERCICE 1 : (5 pts)

On donne les nombres complexes $a = \sqrt{2}(1+i)$; $b = \sqrt{3} + i$ et $c = a^3b$

1°/ Ecrire les nombres complexes a et b sous forme trigonométrique

2°/ Ecrire le nombre complexe c sous forme algébrique puis forme trigonométrique. En déduire les valeurs

de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 2 : (6 pts)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé *direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = 0$.

1°/ a) Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de (E).

b) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = (z-i)(z^2 + az + b)$$

2°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

3°/ On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et le point C d'affixe z_C , symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.

a) Représenter sur le même graphique les points A, B et C. Quelle est la valeur de z_C ?

b) Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$ et la nature du triangle ABC.

PROBLEME : (9 pts)

Ce problème est composé de trois parties indépendantes dans une large mesure.

A-// On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$

1°/ Déterminer l'ensemble de définition de g .

2°/ Montrer que g admet un prolongement par continuité au point 0 que l'on précisera.

B-// On considère la fonction P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1°/ Déterminer les images par P des intervalles $]-\infty; 1[$ et $[1; +\infty[$

2°/ Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 1,6 et 1,7

C- // On considère l'application f de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$

1°/ Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$

2°/ Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f .

3°/ Déterminer pour tout x élément de J ; $f^{-1}(x)$.