

ACADEMIE D'ENSEIGNEMENT DE BAMAKO RIVE GAUCHE	COMPOSITION 2^e PERIODE	EPREUVE : MATHEMATIQUES	
AVRIL 2017	SERIE : T.S.EXP	DUREE : 3h	COEFF : 3

EXERCICE1 : I) a) Calculer l'intégral $I = \int_{20}^{70} \frac{(\ln x - 2)}{x} dx$

La capacité pulmonaire de l'être humain suivant son âge x de 20 à 90 ans, s'exprime en litres, au moyen de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans à 0,1 litre près par défaut.

II) Les observations relevées pour une population p d'une bactérie dans une certaine préparation biologique ont conduit à envisager le modèle suivant :

Le temps est exprimé en heures.

p est une fonction de la variable t qui est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qui vérifie

$$p' = 2,5p \quad \text{et} \quad p(0) = 0$$

- Déterminer $p(t)$ en fonction de t .
- Donner un ordre de grandeur de cette population au bout de 10 heures.

EXERCICE2 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 3$

1 Calculer u_0, u_1, u_2 puis v_0, v_1, v_2 .

2.a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c) Dédurre en utilisant la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. On constate, que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$

a) Démontrer que w_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme w_0 et la raison.

b) Exprimer w_n en fonction de n .

c) Pour quelle valeur de n a-t-on $w_n = -\ln(27^3) - \ln 9$?

4. On pose $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ et $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

Calculer S_n et P_n en fonction de n 0,5

Problème : L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction f , le tracé de sa représentation graphique. 10

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{e^x + 1}{4(e^x - 1)}$$

Soit (C) sa représentation dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 cm.

Partie A - Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

1. Résoudre l'équation $g(x)=0$ 0,5
2. Vérifier que pour tout réel x , $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$ 0,5

En déduire le signe de $g(x)$. 1

Partie B - 1) Montrer que pour tout réel x non nul, $f(-x) + f(x) = 0$. En déduire que le point O est centre de symétrie de (C) . 0,5

Pour les questions 2 et 3, on réduit l'ensemble d'étude à l'intervalle

$$I =]0; +\infty[$$

2.a) Vérifier que $f(x) = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(e^x - 1)}$. 0,5

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ 1

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{4}$ est une asymptote à (C) lorsque x tend vers $+\infty$ 0,5

d) Etudier la position relative de (C) et (D) . 0,5

e) Préciser une équation de l'autre asymptote à (C) . 0,5

3. Soit f' la dérivée de f . 1

a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ et en déduire le sens de variation de f . 0,5

c) Dresser le tableau de variation de f sur I . 1

4. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ précédent, tracer les droites asymptotes et la courbe (C) en tenant compte de la symétrie par rapport au point O . 2,5