

Composition de la 1 ^{ère} Période 2019-2020		
EPREUVE : MATHÉMATIQUES	DURÉE : 3 HEURES	COEF : 03
SERIE : TSExp DOMAINE : SMT		

Exercice 1 :

- I) 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 - (2 + 2i)z + 2 - 4i = 0$
 2) On considère les nombres complexes :
 $U = -2 + 2i$ et $V = \sqrt{3} + i$
 a) Calcule le module et un argument de : U, V et $\frac{U}{V}$
 b) Écrit sous forme cartésienne le nombre complexe $\frac{U}{V}$. En déduit les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
- II) Calcule les limites suivantes :
- $$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - \sqrt{3x-2}}{x-2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \cos x - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2 - \sin x)$$

Exercice 2 :

- I) On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x}}{2 - x}$
 1) Détermine l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de D_f
 2) Calcule la dérivée f' de f
- II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 - x + 5$
 1) Montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
 2) En déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
 3) Calcule $(f^{-1})'(0)$ en fonction de α où f^{-1} est la réciproque de f . Donne la valeur approchée de $(f^{-1})'(0)$.

Problème :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (-1 + 7i)z^2 + (-4 + 3i)z - 40 + 30i$

- A) 1) Vérifie que $P(-5i)=0$
 2) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z + 5i)(z^2 + az + b)$
 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$
- B) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + 2i, -5i$ et $2 - 4i$.
 1) Place les points A, B et C .
 2) Montre que les points A, O et C sont alignés.
 3) Calcule $|z_A - z_B|, |z_A - z_C|$ et $|z_B - z_C|$; en déduit la nature du triangle ABC .
 4) Détermine et construit les ensembles des points M d'affixe z dans les cas suivants :
 a) $|Z + 1 - 2i| = |Z - 2 + 4i|$
 b) $\arg(iZ - 5) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$