

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques
Année D'étude 2019 – 2020

Composition du 2^e Trimestre

Epreuve de Mathématiques

SERIE : TSE_{xp}

DURÉE : 3 H

COEFF : 3

- ☐ Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème à deux parties, tous obligatoires.
- ☐ Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable sera prise en compte dans l'attribution des points.

EXERCICE 1 : (5 Points)

Soit l'équation différentielle suivante (1) : $y' - 2y = xe^x$

- 1- Résoudre l'équation différentielle suivante (2) : $y' - 2y = 0$ **1pts**
- 2- Déterminer les réels a, b pour que la fonction $u(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (1) **1pts**
- 3- Montrer qu'une fonction v est solution de (2), si et seulement si $(u - v)$ est solution de (1) **1pts**
- 4- En déduire les solutions de l'équation différentielle (1) **1pts**
- 5- Détermine la solution de l'équation (1) qui s'annule en 1 **1pts**

EXERCICE 2 : (5 Points)

Le nombre d'arbre d'une forêt, en milliers d'unités est modélisé par la suite (U_n) où U_n une désigne le nombre d'arbres en millier au cours de l'année $(2010 + n)$, $n \in \mathbb{N}$

En 2010 la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

- 1- Montrer que la situation peut être modélisée par
$$\begin{cases} U_0 = 50 \\ U_{n+1} = 0,95U_n + 3 \end{cases}$$
 0.5pts

Déterminez le nombre d'arbre de cette forêt en 2011 et 2012 **0.75pts**

- 2- On définit une seconde suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 60 - U_n$
 - a- Montrez que (V_n) est une suite géométrique, précisez la raison et le premier terme. **1pts**
 - b- En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$ **1pts**
- 3- Vérifiez que pour tout entier naturel $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 0,5 \times (0,95)^n$

Déterminez l'année à partir de laquelle le nombre d'arbre de la forêt aura dépassé de 5% le nombre d'arbres en 2010 **1pts**
- 4- Déterminez la limite de la suite (U_n) puis interprétez **0.75pts**

PROBLEME : **(10 Points)**

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

Soit la fonction g définie par $g(x) = x - e^{\frac{-x}{2}}$

- 1- Etudiez les variations de g sur Dg et dressez le tableau de variation. **1.5pts**
- 2- Démontrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle. **0.5pts**
- 3- Justifiez que $0,7 \leq \alpha \leq 0,71$ **0.5pts**
- 4- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x **0.5pts**

PARTIE B

Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- a- Montrez que $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ **0.5pts**
b- En déduisez un encadrement de $f(\alpha)$ **0.5pts**
- 2- a- Montrez que la droite $(D) : y = -x + 2$ est asymptote à la courbe (Γ) en $-\infty$. **0.5pts**
b- Etudiez la position relative de (D) par rapport à (Γ) . **0.5pts**
- 3- Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} g(x)$ **0.75pts**
- 4- Etudiez les variations de f dressez le tableau de variation. **1pts**
- 5- Déterminez une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0. **0.5pts**
- 6- Déterminez le point d'intersection de (Γ) et l'axe des abscisses. **0.5pts**
- 7- Tracez la courbe (Γ) , (D) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1pts**
- 8- a- Calculez l'intégrale $\int_0^\alpha (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} dx$ par parties **0.75pts**
b- En déduire l'aire $A(\alpha)$, en cm^2 , du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ **0.5pts**