

Académie d'Enseignement de Bamako Rive Droite

Lycée Privé La Lanterne

LLANT

**Composition de la deuxième période 2020-2021**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Comité pédagogique de Mathématiques

SÉRIE : TSEXP

Durée : 3 heures

Coeff : 3

*Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation de la copie.***Exercice1 : (5 points)**

1. Soit  $f$  la fonction numérique telle que  $f(x) = \sqrt{3x+1}$ .
  - a. Quel est son ensemble de définition ? (1 pt)
  - b. Quelle est la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(0) = 3$  ? (1 pt)
  - c. Calcule  $I_1 = \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$ . (1 pt)
2. À l'aide d'une intégration par partie, calcule  $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$ . (2 pts)

**Exercice2 : (5 points)**

1. Simplifier les écritures suivantes :
 
$$X = \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1).$$
 (1 pt)
 
$$Y = 5 \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 4 \ln(e\sqrt{e}).$$
 (1 pt)
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :
  - a.  $\ln(x+5) + \ln(x-2) = \ln 8$  (0,75 pt)
  - b.  $\ln(x-3) + \ln(x-1) < \ln(2x+3)$  (0,75 pt)
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système :  $\begin{cases} -2 \ln x + \ln y = 3 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = -7 \end{cases}$  (1,5 pt)

**Problème : (10 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty]$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2 \ln x - 1}{x}$  et  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

**Partie A**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty]$  par  $g(x) = -x^2 + 6 - 4 \ln x$ .

1. Étudie le sens de variation de  $g$  et calcule les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ . (1,5 pt)
2. Vérifie que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty]$ . (0,5 pt)
3. Vérifie que  $1,86 \leq \alpha \leq 1,87$  et précise le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty]$ . (0,5 pt)

**Partie B**

Soit  $f$  la fonction définie ci-dessus :

1. Détermine les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . (0,5 pt)
2. Calcule  $f'(x)$  et montre que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. (1 pt)  
En déduis le tableau de variation de  $f$ . (1 pt)
3. Montre que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + 3$  est asymptote à  $(C)$ . (1 pt)
4. Détermine le point d'intersection  $A$  de  $(C)$  et  $(D)$ . (0,5 pt)
5. Étudie la position de  $(C)$  et  $(D)$ . (1 pt)
6. Trace  $(C)$  et  $(D)$  dans le repère. (1 pt)
7. En remarquant que :  $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x}$  :  
Calcule l'intégrale  $I_0 = \int_2^e \frac{1}{2} \left[ f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) \right] dx$ . (1 pt)  
Interprète ce résultat sur le graphique. (0,5 pt)

**Bon travail !!!**