

Académie d'Enseignement	Lycée Privé Zéïna de Niamakôrô
de la Rive Droite de Bamako	Année Scolaire 2020-2021

Composition de la Deuxième Période

Épreuve de mathématiques TSExp

Durée : 03 heures

Exercice 1

- 1) Calculer les dérivées de chacune des fonctions numériques suivantes :

$$f: x \mapsto (\ln x)^2 \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1}$$

- 2) On considère les fonctions numériques :

$$h: x \mapsto x^2 \ln(x) \quad \text{et} \quad k: x \mapsto x \ln x$$

a) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, k(x) = \frac{1}{2} h'(x) - \frac{1}{2}$.

- b) En déduire la primitive K de k qui s'annule en 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 3) Donner l'écriture la plus simple des expressions suivantes :

$$I = \ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(e^{-3}) + \ln(\ln(e)) \quad \text{et}$$

$$J = 2 \ln(e^3 \times \sqrt{e}) - 3(\sqrt[3]{e^7}) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right).$$

Exercice 2

- A) Soit h la fonction définie sur $I =]-1; 3[$ par $h(x) = \frac{5x-7}{x^2-2x-3}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x \in I, h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.

- 2) a) En déduire une primitive de h(x) sur I.

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $k = \int_4^5 h(x) dx$.

- B) Soit les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

- 1) Calculer I.

2) Soit la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

- b) En déduire une relation entre I et J.

- c) En déduire la valeur exacte de J.

Problème

Partie A :

A//

L'aire A (en cm²) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids (en gramme) est donnée par l'égalité

suivante : $\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$. ($\ln$ désignant le logarithme népérien).

1° Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$?

2° Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire $A = 30\text{cm}^2$?

B//

pour déterminer l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times \ln(k)$.

1° Le squelette d'un "homme du Cro-Magnon" contient 5% de carbone initial. Quel âge a-t-il ?

2° Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie :

$51,8\% < k < 53,8\%$. Donner un encadrement de l'âge de ce fossile.

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x)$.

1° Étudier f et tracer sa courbe représentative (C) .

2° a) Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un seul point Ω dont on déterminera les coordonnées.

b) Démontrer que $\Omega(1; 0)$ est un centre de symétrie de (C) .

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en Ω .

3° Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dont on précisera un encadrement à 10^{-1} près.

4° Résoudre graphiquement l'inéquation : $x - 1 \leq f(x)$.