

Jeudi, le 16 Février 2022

Composition du mois de Février

EPREUVE DE :	CLASSE :	COEFF :	ANNEE SCOLAIRE :	DUREE :
Mathématiques	TSexp	03	2022-2023	03 Heures

➤ L'élève traitera les exercices dans l'ordre qu'il veut. Aucun brouillon ne sera corrigé.

Exercice1 : - - - - - 6pts

1. Soit le polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

a. Détermine les nombres réels a ; b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

b. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

c. En déduis dans $\mathbb{R}$ la résolution de l'équation et de l'inéquation :

$$(E_1): 2(\ln x)^3 + 7(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = 0.$$

$$(E_2): \ln(2x + 3) + \ln(x^2 + 2x + 2) \leq \ln(8x + 9).$$

2. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} xy = 243 \\ \log_y x + \log_x y = \frac{17}{4} \end{cases}$$

Exercice2 : - - - - - 4pts

Après l'apparition d'une maladie virale, les responsables de la santé publique ont estimé que le nombre de personnes frappées par la maladie au jour t à partir du jour d'apparition du premier cas est $M(t) = 45t^2 - t^3$ pour $t \in [0, 25]$.

La vitesse de propagation de la maladie est assimilée à la dérivée du nombre de personnes malades en fonction de t .

1. Calcule $M'(t)$.

2. En déduis la vitesse de propagation le cinquième jour.

3. Détermine le jour où la vitesse de propagation est maximale et calcule cette vitesse.

4. Détermine les jours où la vitesse de propagation est supérieure à 600 personnes par jour.

Problème : - - - - - 10pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A :

On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$.

1. Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in I$ et étudie son signe sur cet intervalle.

2. Calcule $g(1)$, puis dresse le tableau de variation de g .

3. En déduis que g est positive sur I .

Partie B :

1. Détermine $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interprète graphiquement ces résultats.
2. Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à Γ et étudie leur position relative.
3.
 - a. Montre que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b. En déduis le signe de f' puis dresse le tableau de variation de la fonction f .
 - c. Montre que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse β puis vérifie que $1,47 < \beta < 1,48$.
4.
 - a. Détermine une équation de la tangente (T) à Γ au point d'abscisse e .
 - b. Construis la courbe Γ , l'asymptote (Δ) ainsi que la tangente (T) dans le même repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.
 - c. Discute graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $(m + 2 - x)x = 2 \ln x$.
5.
 - a. Montre que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
 - b. Vérifie que $f^{-1}(-1) = 1$ et calcule $(f^{-1})'(-1)$, où f^{-1} est la bijection de f .
 - c. Construire la courbe (Γ') de f^{-1} dans le même repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Bon travail !!!