

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Série : TSEXP

Avril 2024

Durée : 3h00

Cette épreuve comporte 2 pages – Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : 06 points

- 1) On considère le polynôme P défini pour tout Z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$

- Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P(\overline{Z_0}) = 0$ où $\overline{Z_0}$ est le conjugué de Z_0
 - Calculer $P(1 + i\sqrt{3})$; puis factoriser $P(Z)$
 - Déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique = 2 cm). Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$ où $\bar{b}$ est le conjugué de b
- Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure
 - Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?
- 3) Soit K le point d'affixe $Z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$
- Déterminer les affixes respectives de F et G
 - Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires
- 4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH
- Calculer l'affixe Z_H de H puis montrer que le parallélogramme COFH est un carré
 - Quelle est la nature du triangle AGH ?

On donne $\sqrt{3} = 1,7$

Exercice 2 : 04 points

Soit (U_n) une suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3}$

- Calculer U_1 et U_2
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$
- Étudier la monotonie de (U_n)
- Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$
 - Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison
 - En déduire U_n en fonction de n
 - Calculer, en fonction de n , la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
 - En déduire, en fonction de n , la somme $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Problème : 10 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique = 2 cm

Partie A

- 1) Soit g la fonction définie sur par $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$ si $x \geq 0$
Déterminer le sens de variations de g sur $[0; +\infty[$ et en déduire son signe sur $[0; +\infty[$
- 2) a) Étudier la continuité de f en 0
b) Étudier la dérivabilité de f en 0
- 3) a) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x et vérifier que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = g(x)$
b) Montrer que pour tout $x < 0$, on a $f'(x) > 0$
c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$
d) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
e) Dresser le tableau de variations de f
- 4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right]$ (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$)
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$
d) Préciser la position de (C) par rapport à (D) pour $x < 0$
(On admettra que : $x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \leq 1$ pour $x < 0$)
- 5) Tracer la droite $(\Delta) : y = x$, (D) : $y = x + 1$ et (C) dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
unité graphique = 2 cm

Partie B

- 1) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$
b) Déduire au moyen d'une intégration par parties le calcul de $\int_0^{e-1} f(x) dx$
- 2) Calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $(\Delta) : y = x$, (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$
- 3) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$
a) Montrer que h réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 4) Quelle est l'aire $\mathcal{A}'$ en cm^2 de la boucle délimitée par (C) et (C') ?