

Composition de la première période 2024-2025		
Epreuve de Mathématiques		
Lycée Dagaba Sangaré de Torokorobougou (L-D-S-T) /AE-RD		
SERIE : TSexp	Durée : 3 heures	Coefficient : 3

Exercice 1 :

(6pts)

Soit le polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 + (1 - 9i)z^2 - (24 + 6i)z - 14 + 18i$

1) a) Vérifie que $P(-1 + 5i) = 0$.

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z + 1 - 5i)(z^2 + az + b)$

c) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on considère les points

$A; B$ et C d'affixe respectives $z_A = -1 + 5i; z_B = 1 + 3i$ et $z_C = -1 + i$.

a) Place les points $A; B$ et C

b) Calcule les distances AB et BC puis détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$. Déduis-en la nature du triangle ABC .

c) On note I le milieu du segment $[AC]$. Détermine l'affixe z_I du point I .

d) Détermine puis construis l'ensemble (C) des points M d'affixe z tel que $|z + 1 - 3i| = 2$

3) Soit S la similitude plane directe qui fixe le point A et transforme C en B

a) Détermine l'expression complexe ainsi que les éléments caractéristiques de S .

b) Détermine et construis l'ensemble (C') image de (C) par S .

Exercice 2 :

(4pts)

1) Calcule les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 1}$.

2) Détermine la valeur de a et b pour que f soit continue au point x_0 donné

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x + a}{2 - x}; \text{ si } x > 2 \\ f(x) = \frac{2x + b}{3}; \text{ si } x \leq 2 \end{cases}; x_0 = 2; \quad b) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}; x_0 = 1$$

Problème :

(10pts)

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$ tel que $2,1 < \alpha < 2,2$.

4) Démontre que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

b) Déduis-en les variations de la fonction f puis dresse le tableau de variation de la fonction f .

3) a) Détermine les nombres réels $a; b, c$ et d tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}, f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$

b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (c_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Détermine coordonnées du point d'intersection A de (c_f) et (D) puis étudie la position relative de (c_f) par rapport à la droite (D) .

4) Construis la courbe (c_f) et ses asymptote dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on prendra $\alpha = 2,2$