

Composition de 1^{ère} Période 2024-2025

Epreuve de Mathématiques

Série : TSEXP

Durée : 3

Coéf : 3

Exercice 1 : (5 points)

- 1- Montre que le nombre $(1+i)^{16}$ est un entier naturel.
- 2- Linéarise $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$.
- 3- Trouve les racines cubiques $J = -1+i$ sous la forme algébrique.
- 4- Soit l'équation (E) : $Z^3 - 2iZ^2 - 9Z + 18i = 0$.
 - a) Montre que (E) admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Exercice 2 : (6 points)

1) Calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{x}$;
d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse x_0 dans le cas

suivant :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{Et } x_0 = 1$$

Problème : (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = 4 + \frac{5}{2}i$, $Z_B = 4 - \frac{5}{2}i$ et

$$Z_C = 2 + \frac{3}{2}i.$$

- 1) Place les points A, B et C dans le plan. Calcule les longueurs des côtés du triangle ABC puis en- déduire sa nature.

2) (E) désigne l'ensemble des points M d'affixe Z vérifiant la relation

$$|Z - 4| = \frac{5}{2}$$

- a) Les points A, B, C appartiennent-ils à (E) ? Justifie ta réponse.
- b) Donne une interprétation géométrique de $|Z - 4|$ en utilisant le point I d'affixe Z_1 .
- c) Quel est la nature de (E) ? Construis (E).

Partie B :

A tout point M d'affixe Z du plan on fait correspondre par le point M'

d'affixe $Z' = Z - 4i$.

- 1) Détermine la nature f et ses éléments caractéristiques.
- 2) Soit A le point d'affixe $1+i$ et B' celui d'affixe $-2-i$.
 - a) Place A et B' sur la figure.
 - b) Détermine les affixes des points A' et B tels que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
 - c) Place les points A' et B sur la même figure.
- 3) Soit K le milieu $[AB']$. Montre que les points A', K et B sont alignés.