

LYCEE PRIVE FATOUMATA SIRE TOURE (LPST)
COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE

Classe de : TSEXP Année scolaire : 2024 - 2025 Durée: 3heures coefficient: 3
 Epreuve de : MATHÉMATIQUES

(6,5points)

EXERCICE 1 :

Soit (U_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.
 Soit (V_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.
 Pour tout entier naturel n , on pose Z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

- 1) a) Exprime U_n et V_n en fonction de n .
 b) Déduis-en Z_n .
- 2) Démontre que (Z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de 1^{er} terme $Z_0 = 2\sqrt{2} + i$.
- 3) Soit le plan complexe P , rapporté au repère orthogonal direct $(O; u; v)$ et M_n le point d'affixe Z_n .
 Détermine la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe Z_{n+1} puis donne ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 : (4points)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = 0 \quad (E)$$

- 1) a) Détermine le réel b tel que i soit une solution de (E) . (1pt)
 b) Détermine les réels a et b tels que pour tout complexe Z .
 $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = (Z - i)(Z^2 + aZ + b)$ 1,5pts 1)
- 2) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $Z^2 + \sqrt{3}Z + 1 = 0$.
 b) En déduis les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

PROBLEME : (9,5points)

- A) 1) Résous l'équation différentielle: $4y'' + y = 0$. (1,5pt)
 2) Détermine la solution particulière f dont la courbe représentative (C) passe par le point $\Omega(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$. (1,5pt)
- B) 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$
 a) Etudie les variations de la fonction g . (1pt)
 b) En déduis le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. (0,5pt)
- 2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$, (C) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; i; j)$ (unité graphique est 2cm sur (Ox) et 1cm sur (Oy))
 a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,5pt)
 b) Démontre que la droite $(\Delta): y = x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$. (0,5pt)
 c) Etudier la position relative de (C) et (Δ) . (0,5pt)
 d) Calcule $f'(x)$ et montre que : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ puis dresser le tableau de variation de f . (2,5pts)
 e) Tracer (C) et (Δ) . (2pts)

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})e^{-2x}$

- a) Prouve que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)
 b) Calcule en cm^2 l'aire (D) de la partie D du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. (0,5pt)