

Lycée La Bruyère (LBRUY)

COMPOSITION DU 1^{er} TRIMESTRE 2025-2026

Classe : TSExp

3 Février 2026

Durée : 3 heures

Coef : 03

EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5 points]

A. Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 3x - 1; I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \frac{x^6 - 2x^5 + x^4 + 3x - 1}{x^4}; I = \mathbb{R}^*$

3) $f(x) = \sqrt{-6x + 5}; I =]-\infty; \frac{5}{6}[$; 7) $f(x) = (-6x + 9)(x^2 - 3x + 7)^5; I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = -\tan^2 x; I =]0; \frac{\pi}{2}[$ 6) $f(x) = \tan^{13} x + \tan^{11} x; I =]0; \frac{\pi}{2}[$.

B. On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$.

- Détermine le domaine de définition D_f de f . (0,25 pt)
- Détermine les réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$. (0,75 pt)
- Détermine la primitive F de f prenant la valeur $\frac{5}{2}$ en 0. (0,5 pt)
- Calcule la valeur moyenne de f sur $[2; 5]$. (0,5 pt)

Exercice 2 : -----[5 points]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. (unité graphique : 4cm)

Soient K, L, M les points d'affixes respectives : $z_K = 1 + i$; $z_L = \bar{z}_K$; $z_M = -i\sqrt{3}$

- Place ces points dans le plan. On complètera la figure dans la suite : (1 pt)
- on appelle N le symétrique du point M par rapport au point L . Vérifie que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$. (0,5 pt)
- La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C . Détermine les affixes respectives z_A et z_C des points A et C . (1 pt)
- La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B . Détermine les affixes respectives z_D et z_B des points D et B . (1 pt)
- a) Montre que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$. (0,5 pt)

b) Montre que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$. (0,5 pt)

c) Dédus-en les natures du triangle BCK et du quadrilatère $ABCD$. (0,5 pt)

Problème : -----[10 points]

Partie A : (2 pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 4$.

1. Etudie le sens de variations de g puis dresse son tableau de variations. (1 pt)

2. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis que $-2,2 < \alpha < -2,1$. (0,5 pt)

3. Dédus-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

Partie B : (6,5 pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(Unité graphique : 1 cm)

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f . (0,25 pt)

2. Calcule les limites de f aux bornes de D_f . (C) admet-elle des asymptotes parallèles aux axes du repère. (2 pts)

3. a) Montre qu'il existe trois réels a, b et c tel que, $\forall x \in D_f : f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^2-1}$. (0,5 pt)

b) Dédus-en que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) puis étudie les positions relatives de (C) et Δ . (0,5 pt)

4. a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$ (0,75 pt)

b) Dédus-en le sens de variation de f et dresse son tableau de variation. (1 pt)

5. Montre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. Dédus-en un encadrement de $f(\alpha)$. (0,5 pt)

6. Trace (C) et (Δ) . (1 pt)

Partie C : (1,5 pt)

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

1. Montre que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera. (0,5 pt)

2. Dresse le tableau de variation de h^{-1} . (0,25 pt)

3. Calcule $h(2)$ et $(h^{-1})'(2)$. (0,5 pt)

4. Trace $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C) . (0,25 pt)