

Exercice 1 : (4points)

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{e^x} dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x dx$.

1°) Calcule $I + J$. (1point)

2°) A l'aide de deux intégrations par parties, démontre que : $K = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$ (1point)

3°) En déduis la valeur de $I - J$. (1point)

4°) Calcule I et J . (1point)

Exercice 2 : (6points)

I. 1°) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$. (1,5point)

2°) Détermine les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit une Solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4x$. (1,5point)

3°) Démontre qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E). (1 point)

En déduis la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$. (0,5point)

II. La capacité pulmonaire, exprimée en litres, de l'être humain suivant l'âge de 10 à 90 ans, est donnée par la fonction h définie $h(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$

Détermine la valeur moyenne de la capacité pulmonaire de 20 à 70 ans à 0,1 litre près par défaut. (1,5point)

Problème : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C_f la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , unité graphique le centimètre.

1) Soit g la fonction auxiliaire définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

a) Etudie les variations de g . (1,25pt)

b) Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ sur D_g . (0,75pt)

2) a) Calcule les limites de f aux bornes de D_f . (1 pt)

b) Etudie les variations de f , puis dresse son tableau de variation. (1,5pts)

3) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 vérifiant

$2 \leq x_0 \leq 3$, trouve une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près. (1pt)

4) Montre que la droite Δ d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à C_f , puis étudie la position de Δ et C_f . (1pt)

- 5) Détermine les coordonnées du point A de C_f où la tangente (T) est parallèle à la droite Δ (1pt)
- 6) Représente graphiquement la courbe C_f , les droites Δ et (T). (1.5pt)
- 7) Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$
- a) Calcule $h'(x)$. (0.5pt)
- b) En déduis une primitive de f sur $]0, +\infty[$. (0.5pt)