

COMPOSITION DU 2^e TRIMESTRE

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DUREE : 3H

TSExp

COEF : 3

EXERCICE 1 : (4.5 points)

A- Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1- Calcule I_0 et I_1 (Pour on pourra poser $\ln x = 1 \times \ln x$) **1pt**

2- Montre à l'aide d'une intégration par parties $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e^{-(n+1)} I_n$

NB : (On pourra poser $\ln x = 1 \times \ln x$) **0.75pt**

B- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 - 5x + 4 = 0$ **0.5pt**

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations et de l'inéquation

a) $(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$ **0.75pt**

b) $e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0$ **0.75pt**

c) $2^{2x} - 5(2^x) + 4 < 0$ **0.75pt**

EXERCICE 2 : (5.5 points)

A- On considère les équations différentielles :

(E) : $y'' + y = -2 \sin x$ (F) : $y'' - 6y' + 9y = 0$ et (G) : $y' - y = 0$

Soient les fonctions $f(x) = x \cos x$; $g(x) = (1-x)e^{3x}$ et $h(x) = x^2 - 2x$

1- Montre que f est solution de (E) et que g est solution de (F) **1.5pt**

2- Montre que h n'est pas solution de (G) **0.5pt**

B- Résous les équations différentielles suivantes : **2pt**

(I) : $2y' - y = 0$ (J) : $y'' + 9y = 0$ (K) : $y'' + 6x - \frac{1}{x^2} = 0$

C- Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$

1- Résous (E) **0.75pt**

2- Détermine la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative (Cf) passe par le point

$A(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3 **0.75pt**

PROBLEME : (10 points)**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :**

Soit la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$

1- Montre que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et dresse son tableau de variation. **2pts**

2- Calcule $g(1)$ et montre que $\forall x \in]0, 1]$; $g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$; $g(x) \geq 0$ **0.75pt**

Partie B : Etude de la fonction principale :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Calcule les limites des f aux bornes de $]0, +\infty[$ puis en donner une interprétation. **1pt**
- 2- a- Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}f)$. **0.75pt**
b- Détermine la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à (Δ) . **0.75pt**
- 3- Montre que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ **0.75pt**
 - a- En déduire le sens de variations de f **0.5pt**
 - b- Dresse le tableau de variation f **0.5pt**
 - c- Détermine les coordonnées du point en le quel la tangente est parallèle à la droite (Δ) **0.5pt**
- 4- Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ et la droite (Δ) **1pt**
- 5- Calcule par partie $A = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ **0.5pt**
 - a- Soit D le domaine du plan défini par $D = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x + 1 \leq y \leq f(x) \end{cases} \right. \right\}$
 - b- Hachure le domaine D et en donner l'interprétation graphique. **0.5pt**
 - c- En déduire en cm^2 l'aire de D . **0.5pt**