

COMPOSITION DU 2 ^e TRIMESTRE 2025-2026			
Classe : TSExp	Mai 2026	Durée : 3 heures	Coef : 03
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES			

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5,25 points]

En 2025, un pays avait une population de 25 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5% par an. Par ailleurs, on constate une augmentation annuelle supplémentaire de 0,45 million d'habitants dès l'année 2026. L'unité étant le million d'habitants ; on note $u_0 = 25$ l'effectif de la population en 2025 et u_n le nombre d'habitants en 2025 + n .

1. a) Calcule u_1 et u_2 . (1 pt)
b) Montre que $u_{n+1} = 1,015u_n + 0,45$. (0,5 pt)
2. On se propose de prévoir directement l'effectif de la population en 2045 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon; pour cela on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = 30 + u_n$.
 - a) Calcule v_1 et v_2 . (1 pt)
 - b) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (0,75 pt)
 - c) Exprime v_n puis u_n en fonction de n . Déduis – en alors l'effectif de la population de ce pays en l'an 2045. (on prendra le résultat arrondi en million d'habitants). (1,5 pt)
 - d) Détermine par calcul à partir de quelle année l'effectif de la population de ce pays dépassera 50 millions d'habitants si l'évolution se poursuit de la même manière. (0,5 pt)

Exercice 2 : -----[5,5 points]

A. 1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $[z^2 - 2(1 + i)z + 4i] \times (z^2 + 4z + 8) = 0$. (1,5 pt)

Les images des racines dans le plan complexe direct sont notées A, B, C, D tels que :

- A et B ont même abscisse
- A et C ont même ordonnée

2. Définis la similitude directe S du plan telle que $S(A) = C$ et $S(B) = D$. (0,75pt)

3. Donne l'angle, le rapport et le centre Ω de S. (0,75 pt)

B. En chimie, la notation pH signifie « Potentiel hydrogène ». Le pH permet d'exprimer le caractère acide ou basique d'une solution. On pose : $pH = -\log[H^+]$ où $[H^+]$ désigne la concentration en ions hydrogènes, en moles par litre.

On dit que la valeur $pH = 7$ correspond à la « neutralité ».

- 1) Pour un acide : $1 < pH < 7$. Déduis-en un encadrement de $[H^+]$ pour un acide. (0,5 pt)
- 2) Pour une base : $7 < pH < 14$. Déduis-en un encadrement de $[H^+]$ pour une base.

(0,5 pt)

3) Pour l'urine des carnivores, en moyenne : $[H^+] = 3,16 \times 10^{-6}$ mole par litre. Calcule son pH . L'urine est-elle acide ou basique ? (0,75 pt)

4) Pour le sang, $[H^+] = 3,98 \times 10^{-8}$. Montre que le sang est légèrement basique. (0,75 pt)

Problème : -----[9,25 points]

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-2x - 4)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Pour tout réel x , on considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$$

1) Etudie les variations de la fonction g . (1,5 pt)

2) Déduis - en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

Partie B

1) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (1 pt)

2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$ puis interprète ce résultat. (0,75 pt)

3) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$. (0,75 pt)

4) Déduis - en le sens de variation de f . (0,75 pt)

5) Détermine les coordonnées du point B intersection de la courbe (C_f) de f et de son asymptote oblique (D) . Déduis - en la position de (C_f) et (D) . (0,75 pt)

6) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifie que $-2 < \ell < -1$. Donne un encadrement de ℓ à 0,1 près. (0,75 pt)

7) Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0. (0,5 pt)

8) Trace (D) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (1 pt)

9) Calcule l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. (1 pt)