



Ministère de l'Éducation Nationale République du Mali
Académie d'enseignement de Un Peuple – un But – Une Foi
Bamako Rive Droite

***** Lycée Alou Kouma *****

Composition de la 2^{ème} période de : Mathématiques

Classe : TSExp Durée : 3heures Coefficient : 03

Consignes

- Ce sujet comporte deux exercices et un problème tous obligatoires que l'élève traitera dans l'ordre qu'il veut ;
- Le candidat ne sera jugé que sur la clarté et la précision du raisonnement notés sur sa copie ;
- Toute réponse sans justification vaut zéro point, les ratures et les abréviations valent moins un point.

Exercice 01: (06points)

A) L'objectif est de calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$.

1. Soit φ la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calcule la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2+2}$. 0,5pt

b) En déduis la dérivée φ' de φ . 0,75pt

c) En déduis la valeur exacte de I . 0,5pt

2. Calcule de J et K .

a) Sans calculer explicitement J et K , vérifie que : $J + 2I = K$. 0,5pt

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montre que $K = \sqrt{3} - J$. 1pt

c) Déduis-en les valeurs exactes de J et K . 0,5pt

B) Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimée en heures), peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelle de la variable t .

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction.

On a constaté que : $g'(t) = kg(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle $g(0) = N$. 0,25pt

2. Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures. 1pt

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures. 1pt

La partie A et B sont indépendantes

Exercice 02: (04points)

I. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $(F) : y'' + 2y' + 5y = 0$. 0,5pt

Détermine la solution particulière f de (F) telle que : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(0) = 0$. 1pt

II. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 4xe^x$.

i) Trouve les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E) . 1pt

ii) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y'' - y = 0$ puis en déduis l'ensemble solution de l'équation (E) . 1,5pt

Problème : (10points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Montre que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$. 0,5pt
 b) Montre que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. 0,5pt
 c) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5pt
 d) Montre que les droites (D_1) et (D_2) d'équation respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes obliques à (C_f) . 1pt
 e) Précises les positions relatives des droites (D_1) et (D_2) par rapport à (C_f) . 1pt
2. Etudie la parité de la fonction f . En déduis que (C_f) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées. 1pt
3. Etudie les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresse son tableau de variation. 2pts
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0. 0,5pt
5. Justifie que, pour étudier la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (C_f) , il suffit d'étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. 1pt
 En déduis la position de (T) par rapport à (C_f) . 1pt
6. Trace (C_f) , (D_1) , (D_2) et (T) . 1,75pt

« Bonne chance dans la rigueur et l'effort personnel !!! »