

COMPOSITION DE LA SECONDE PÉRIODE

AE/ BAMAKO RIVE GAUCHE	CLASSE : TSEXP	RÉPUBLIQUE DU MALI Un peuple -Un but- Une foi
LYCÉE PRIVÉ : LES CHAMPIONS	ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	DURÉE :3H Coefficient :3

La qualité de la rédaction, la clarté , les démarches et l'utilisation correcte des formules seront prise en compte lors de l'appréciation des copies

EXERCICE 1 :

1-Démontre que que pour tout nombre réel x :

1) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ On pourra démontrer par la linearisation

2-Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx$

II) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$

1- Précise l'ensemble de définition de f

2- Détermine les nombres réels a, b, c et d tels que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$$

3-Donne une primitive à f sur $] -1 ; 1[$. Calcule $\int_{-1}^1 f(x) dx$

1) Résous les systèmes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

2)
$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1) Soit (U_n) une suite dans l'ensemble des nombres complexes définie par son premier terme U_0 , et par

relation (E): $\forall x \in \mathbb{N}; (1 + i)U_{n+1} = U_n + 1 + i$

1. On pose $U_0 = 1 - i$,

Calculer U_1 et U_2 puis en déduire U_n . Que peut on conclure pour la suite (U_n) ?

2. On pose $U_0 = 2 - i$ et (W_n) la suite définie par : $W_n = U_n + \alpha$

1. Déterminer α pour que (W_n) soit une suite géométrique.

2. Exprimer W_n puis U_n en fonction de n .

3. Calculer $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

II) Le but de cet exercice est l'étude de la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un liquide.

Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minutes à l'instant t exprimé en minutes.

La fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$.

1) Détermine la fonction N sachant que $N(0) = 1500$.

2) Calcule la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$ mn

3) Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera t elle d'un tour par minute ?

3) Calcule la valeur moyenne de N entre les instants $t = 0$ mn et $t = 1$ mn

Problème :

PARTIE A

On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2e^{x+1}$ (1)

1) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 e^{x+1}$ est une solution de l'équation différentielle. (1)

2) a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si

la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = e$ et $h'(0) = -2e$

PARTIE B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité (1 cm)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{x+1}$ et C sa courbe représentative

1. Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f .

2. Tracer la courbe (C) dans le repère orthonormé (O, I, J)

3. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x+1}$, soit une primitive de f .

4) Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$.

b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$

PARTIE C:

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

1. Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Tracer la courbe représentative (T) de la réciproque de g dans le même repère que (C) .

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation:

$f(x) = mx$ où m est un paramètre réel non nul.