

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées. L'utilisation des calculatrices non programmables est autorisée. La rapidité et l'extrême vigilance seront des atouts distinctifs. **Bonne évaluation**, seul le travail bien fait libère.

SITUATION 1 : 3,25 pts

- I. Recopie les phrases ci-dessous, en comblant les pointillés par les mots(expressions) approprié(s). **(0,25 × 9)**
- Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation ... est une ... à la courbe (C) de f .
 - Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe (C) de f admet une ... de direction celle de ...
 - Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ alors (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une ... $(\forall x_0 \in D_f)$
 - Pour montrer que la droite $(\Delta): y = ax + b$ est ... à (C_f) , il suffit de montrer que :
 - On dit qu'une fonction f est prolongeable par continuité en un réel x_0 si et seulement si $x_0 \notin \dots$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ est ...
- II. Pour chacune des phrases ci-dessous, on ne demande pas de recopier les phrases, mais de recopier le numéro de la question suivi de V si l'affirmation est *vraie* ou de F si l'affirmation est *fausse*. **(0,25 × 4)** pts
- La continuité est une condition nécessaire de dérivabilité mais pas suffisante.
 - Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 .
 - L'asymptote horizontale est aussi appelée asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.
 - Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur $f(I)$.

SITUATION 2 : 6,75 pts

On pose : $f(z) = z + \frac{4}{z}$; $\forall z \in \mathbb{C}^*$

- Détermine z_1 et z_2 les solutions de l'équation $(E): f(z) = -2$. (On prendra $\Im m(z_1) > \Im m(z_2)$)
- Ecris z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
- Montre que $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{2017}$.
- Soient les points A, B et C d'affixes respectivement : α, z_1 et z_2 avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Détermine la valeur de α pour laquelle ABC est un triangle équilatéral direct.
- Montre pour $z \in \mathbb{C}^*$ l'équivalence : $f(z) = \overline{f(\bar{z})} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 4) = 0$.
- En déduis la nature de l'ensemble : $(\mu) = \{M(z) \in \mathcal{P}; f(z) \in \mathbb{R}\}$.
- Vérifie que les points A, B et C appartiennent à l'ensemble (μ) .

SITUATION PROBLEME : 10 pts

PARTIE A : *Etude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

- Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.
b) En déduis le signe de la fonction g suivant les valeurs de x .

PARTIE B : *Etude de la fonction principale*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) . (Unité graphique 2 cm).

1. a) Calcule les limites de f en : $-\infty$, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 1.
2. a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C) .
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D) .
4. Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)^3}$.
5. Trace (C) et (D) . (On prendra $f(\alpha) \simeq 7$).

PARTIE C : *Etude d'une bijection.*

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1[$.

1. Montre que φ réalise une bijection de $] -\infty; 1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ et (C^{-1}) sa représentation graphique.
 - a) Précise le domaine de définition et le sens de variation de φ^{-1} .
 - b) Dresse le tableau de variation de φ^{-1} .
 - c) Justifie que φ^{-1} est dérivable en 0 puis calcule $(\varphi^{-1})'(0)$.