

SUJET

EXERCICE 1. 8 points

.A.1. On suppose que $-\pi < \theta < \pi$. Déterminer le module et un argument de :

a. $Z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$.

b. $Z_2 = \sin \theta + i(1 + \cos \theta)$.

c. $Z_3 = \cos \theta + i(1 + \sin \theta)$.

d. $Z_4 = 1 + \sqrt{2} \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

2. Montrer que pour tous α et β de $\mathbb{C}^*$, on a : $\left| \frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2} \right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha \times \beta|}$.

.B.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a. $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 - 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$.

b. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2 \cos \theta$. c. $z^2 - 2\bar{z} = 0$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

EXERCICE 2. 6 points

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

.1. Comparer $P(\bar{z})$ au conjugué de $P(z)$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z . Calculer $P(i)$. En déduire une, puis deux solutions de l'équation (E) : $P(z) = 0$.

.2. Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du degré à coefficients réels.

.Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

.Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E) .

EXERCICE 3. 6 points

.A. Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1-i)z + 2-i$.

.a. Déterminer les éléments caractéristiques de s .

.b. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|(1-i)z + 2-i| = 4$.

.c. Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

.B. On considère une similitude directe s de centre P telle que $s^{-1}(N') = N$ et $s^{-1}(M') = M$.

Démontrer qu'il existe une similitude directe s' de même centre P telle que $s'^{-1}(N) = M$ et $s'^{-1}(N') = M'$.