

Exercice N°1

(4points)

L'effectif d'une classe est constitué de 70% de garçons et 30% de filles. On sait que 20% des garçons et 15% des filles aiment « naviguer » sur internet.

1) On note

G : « l'élève est un garçon »,

N : « l'élève aime naviguer sur internet ».

a) Faire un arbre pondéré (0,75pt)

b) On choisit au hasard un élève de cette classe. Quelle est la probabilité

b_1) Pour que ce soit un garçon internaute ? (0,75pt)

b_2) Pour que ce soit une fille internaute ? (0,75)

b_3) En déduire la probabilité pour que l'élève choisi soit un « navigateur ». (0,75pt)

2) Si l'élève choisi n'est pas un navigateur. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ? (01pt)

Exercice N°2

(6points)

A) On donne le nombre complexe $\mu = 3 + 3i$ (0,5pt)

1) Mettre μ sous forme exponentielle

2) Montrer que $\mu^3 = -54 + 54i$ (0,75pt)

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$ (on donnera les solutions sous forme exponentielle) (0,75pt)

b) En déduire les solutions sous forme exponentielle de l'équation (01pt)

$$z^3 = -54 + 54i.$$

B) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2i, \quad z_B = 2 + i \quad \text{et} \quad z_C = 3 + 3i.$$

1) Écrire le quotient sous la forme algébrique

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$$

En déduire la nature du triangle ABC . (0,75pt)

- 2) Déterminer le centre I et le rayon du cercle $C(I, r)$ circonscrit au triangle ABC (0,75pt)
- 3) Soit f la transformation qui laisse invariant le point B et transforme C en A .
- a) Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de f (01pt)
- b) Déterminer l'image $C'(I', r')$ le cercle image de $C(I, r)$ (0,5pt)

Problème

(10pts)

Partie A : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - xe^x + e^x & \text{si } x \geq 0, \\ 3x - \ln(1 + e^{1/x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

- 1) a) Etudier la continuité de f en 0 (0,5pt)
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation graphique des résultats (01pt)
- 2) a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité D_f (0,25pt)
- b) Calculer les limites aux bornes de D_f (0,75pt)
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x]$; conclure (0,5pt)
- d) Etudier la nature de la branche infinie de (C) en $+\infty$ (0,5pt)
- e) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote en $-\infty$ (0,5pt)
- 3) a) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable (01pt)
- b) Dresser le tableau de variation de f (0,5pt)

- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]0; +\infty[$ une solution $\alpha \in]0,9; 1,1[$ (0,5pt)
 b) Déterminer la valeur exacte de α (0,5pt)
 c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) en α (0,5pt)
- 5) Soit (Γ) la parabole d'équation $x^2 - 1$.
 Etudier la position de (C) par rapport à (Γ) sur $[0; 1]$ (0,5pt)
- 6) Tracer la courbe (C) et la parabole (Γ) (01pt)

Partie B Calcul d'aire

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$.

1) Soit

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 x e^x dx,$$

calculer $I(\lambda)$. (0,5pt)

2) On appelle $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine délimité par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équation : $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que (0,75pt)

$$A(\lambda) = (4e - 8e^{\lambda} + 4\lambda e^{\lambda}) \text{ cm}^2.$$

b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+ (0,25)