

DRE GRAND LOME	COMPOSITION REGIONALE	PREMIER SEMESTRE/ Janv 2023
CLASSE : Terminale TD	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Coeff : 3 / Durée :4h

EXERCICE 1 (05pts)

Soient α et β deux nombres réels et $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct du plan complexe $\mathcal{P}$. On définit la transformation f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe $z = x + iy$, associe le point M'

d'affixe $z' = x' + iy'$; (x, y, x' et y' sont des réels) par :
$$\begin{cases} x' = \beta x + \alpha y + \alpha \\ y' = -\alpha x + \beta y + \beta \end{cases}$$

1. Montrer que l'écriture complexe associée à f : $z' = -i(\alpha + i\beta)z + \alpha + i\beta$. (0,5 pt)

2.a. Déterminer les valeurs de α et β pour que f soit une translation dont on précisera le vecteur. (0,5 pt)

b. Pour quelles valeurs de α et β f est admet un point invariant. (0,5 pt)

3. Déterminer les valeurs de α et β pour que f soit :

a. une homothétie de rapport $-\sqrt{3}$. Préciser le centre de cette homothétie. (0,5 pt)

b. une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Préciser le centre de cette rotation. (0,75 pt)

c. une similitude directe de centre J d'affixe $-1 - i$.

Quel est l'angle et le rapport de cette similitude ? (1 pt)

4. On donne $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

a. Donner les éléments caractéristiques de f . (0,75 pt)

On note l'affixe ω de son centre K .

b. Pour tout point M de $\mathcal{P}$ différent de K . Montrer que $\frac{z' - \omega}{z' - z} = ai$ où a est un réel à déterminer puis en déduire la nature du triangle KMM' . (0,75 pt)

EXERCICE 2 (4 pts)

1- On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout couple (x, y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y , en convenant que 1 cm représente 50 sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble Δ des points $M(x, y)$ satisfaisant au système (S) :

$$\begin{cases} 100 \leq x \leq 300 \\ 100 \leq y \leq 300 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 400 \\ x + y \leq 600 \end{cases}$$

Colorier en couleur, la partie solution de (S) . (1.5pt)

2- Une entreprise peut, sur une certaine machine, fabriquer soit le produit A, soit le produit B. La production d'une unité de A dure une minute, celle d'une unité de B dure 30 secondes. Le temps total disponible, déduction faite des temps morts, est de 400 minutes par jour. Compte tenu d'une part de la demande, il faut produire chaque jour au moins 100 unités de chaque produit et d'autre part, compte tenu des matières premières disponibles, on ne peut fabriquer plus de 300 unités de A par jour. De même on ne peut fabriquer plus de 300 unités de B par jour. La production d'une unité de A absorbe une unité d'un produit C, celle d'une unité de B absorbe également une unité de C, et l'on ne dispose que de 600 unités de C par jour.

a) En prenant x pour le produit A et y pour le produit B, exprimer en fonction de x et de y le bénéfice de l'entreprise sachant qu'elle est de $40f$ par unité de A et de $30f$ par unité de B produites. (0.75pt)

b) Justifier que (S) est le système de contraintes lié à la production de cette entreprise. (0.75pt)

c) Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre d'unité du produit A et B pour avoir le maximum de bénéfice. Quel est ce bénéfice ? (1pt)

PROBLEME (11pts)

A/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

- 1- Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g . (2pts)
- 2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $a \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$. (0.75pt)
- 3- Donner un encadrement de a par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel à préciser. (0.5pt)
- 4- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. (0.5pt)

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$. (0.75pt)
2. Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f (1.5pt)
3. Démontrer que $f(a) = 3a - \frac{1}{2a^2}$ (0.5pt)
4. En utilisant l'encadrement de A/3, montrer que : $1,6 < f(a) < 2,1$ (0.5pt)

C/ Soit les points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y . (0.75pt)
2. Démontrer qu'une équation de la courbe (τ) à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe (C_f) est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. (0.5pt)
3. Etudier la position relative de (τ) par rapport à (C_f) . (1pt)

D/ On considère un réel m supérieur à 1. Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1nx}{x^2}$$

1. Démontrer que H définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = -\frac{1+1nx}{x}$ est une primitive de h . (0.5pt)
2. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1. (0.5pt)
3. Déterminer si elle existe la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. (0.75pt)