

Systèmes linéaires

1. Définition :

On appelle système de n équations à p inconnues, tout système noté S pouvant se

ramener sous la forme (S):
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$
 dans lequel $a_{i,j}$ et b_i sont

des réels (ou nombres complexes) donnés.

NB :

L'écriture $M = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ est appelé matrice complète à n lignes et p colonnes du système S .

2. Résolution et opérations élémentaires :

Pour résoudre un système de n équations à p inconnues, on utilise la méthode du Pivot de Gauss ou encore appelé méthode triangulaire.

On note de haut en bas $L_1; L_2; \dots; L_n$ les n équations ou lignes du système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites élémentaires :

- Echange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{R}^*$)
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne :
 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $i \neq j$)

On admet ainsi le théorème suivant :

Théorème :

Etant donné un système linéaire de p lignes $L_1; L_2; \dots; L_p$ on obtient un système équivalent en effectuant une des opérations élémentaires suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{R}^*$)
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $i \neq j$)

La méthode du pivot de Gauss consiste à exécuter, dans un ordre bien déterminé, des opérations élémentaires sur les lignes d'un système, conduisant à un système triangulaire (équivalent) plus facile à résoudre ; cette méthode est en fait un algorithme susceptible d'être exécuté par un ordinateur.

Exemple 1 :

Résoudre le système suivant : $(S) \begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35 \end{cases}$

Solution :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad (S_1) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 12y + 17z = 53 \\ 3x + 22y + 19z = 35 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad (S_2) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2y + 3z = 9 \\ 7y - 2z = -31 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \quad (S_3) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ 7y - 2z = -31 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \quad (S_4) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2}z = -\frac{125}{2} \end{cases}$$

Nous obtenons un système triangulaire (S_4) . On vérifie que :

(S_4) est équivalent à (S) ;

(S_4) admet une solution et une seule : $(2; -3; 5)$.

On en déduit que (S) admet une solution et une seule : $(2; -3; 5)$.

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 \quad \quad \quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

Solution :

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 \qquad \qquad \qquad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0 + 0 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 0 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{array} \right.$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{array} \right.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14 \end{array} \right.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_4 = -1 \end{array} \right.$$

En résolvant L_4 , puis L_3 , L_2 et L_1 , on obtient $x_4 = -1$, $x_3 = 3$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 0$.

Le système admet donc une solution unique $(0; 1; 3; -1)$.

Remarque :

Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul on dit que la méthode de Gauss "se bloque" ; c'est le cas dans l'exercice 2.

Système carré

En particulier, un système est dit carré si $p=n$.

Un système carré est dit triangulaire à diagonale unité si l'on a :

$a_{i,j}=0$ pour $i>j$ et $a_{i,i}=1$ avec $1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n$.

Par exemple, la forme générale d'un système de 3 équations à 3 inconnues, triangulaire à diagonale unité est :

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est très simple et, de plus on admet :

Propriété :

Un système triangulaire à diagonale unité admet quel que soit le second membre, une et une seule solution.

3. Interprétation vectorielle de la méthode du pivot de Gauss :

Soit S , un système linéaire de n équations à p inconnues tel que :

$$(S): \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $B=(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_p)$.

Considérons les vecteurs :

$\vec{a}_1$ de coordonnées $(a_{1,1}; a_{2,1}; \dots; a_{n,1})$

$\vec{a}_2$ de coordonnées $(a_{1,2}; a_{2,2}; \dots; a_{n,2})$

.

.

.

$\vec{a}_p$ de coordonnées $(a_{1,p}; a_{2,p}; \dots; a_{n,p})$

et $\vec{b}$ de coordonnées $(\vec{b}_1; \vec{b}_2; \dots; \vec{b}_n)$ tel que $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$.

Résoudre le système S , revient à chercher les combinaisons linéaires des vecteurs

$\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_p$ égales au vecteur $\vec{b}$.

Supposons $a_{1,1}$ non nul et posons $\vec{f}_1 = \frac{1}{a_{1,1}} \vec{a}_1$.

On a une nouvelle base lorsqu'on remplace un vecteur de base par la combinaison linéaire des autres.

$$B' = (\vec{f}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n)$$

$$\text{Posons } \vec{f}_2 = \frac{1}{a_{2,2}} \vec{a}_2$$

$$\text{On a une autre base } B'' = (\vec{f}_1; \vec{f}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_n)$$

Si l'un des coefficients $a'_{i,i}$ est nul, on permute deux vecteurs de base avant de poursuivre les opérations.

La méthode de pivot de Gauss consiste donc à rechercher en effectuant des opérations élémentaires sur la base initiale une base dans laquelle, pour tout $i \in \{1; 2; \dots; p\}$, le vecteur $\vec{a}_i = (0; 0; \dots; a_{i,i}; \dots)$ ait des coordonnées toutes nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est égale à 1.