

FICHE SUR LES FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Problème1 : Extrait du Bac 2011 T. S.Exp

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une Petrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b) Montrer que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

On appelle cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

2) Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Déterminer l'équation de (T).

4) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Tracer (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

6) Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200.

7) Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation.

Problème2 : Extrait du Bac 2010 T. S.Exp

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[10 ; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$

1) Calculer $f'(x)$.

2) Démontrer que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10 ; e^3]$ et négative sur $[e^3 ; 100]$.

3) Dresser le tableau de variations de f .

Partie B

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge.

x représenté en années et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle $[10 ; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$. où f est la fonction définie dans la partie A.

1) Calculer la capacité pulmonaire à **10 ans; 15 ans; 30 ans et 60 ans.**

2) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse : **1cm** pour **10 ans** et en ordonnées **3cm** pour **1 litre**).

- 3) À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
- 4) Déterminer graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à **5 litres**.

Problème3 :

A. Le plan P est muni du repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : **4 cm** sur l'axe des abscisses et **2 cm** sur l'axe des ordonnées. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

- 1) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$
- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- 4) Donner le tableau de variation de f .
- 5) Représenter la fonction f dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

B. On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t , (t positif exprimé en secondes), la concentration y de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On appelle « concentration » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité de sang qui le contient.

- 1) En utilisant les résultats de la partie **A.**, donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t en secondes.
- 2) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?
- 3) Calculer au bout de combien de temps la concentration retombe au quart de sa valeur maximale. Vérifier graphiquement en utilisant la question 5) du **A.**
- 4) Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t , $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

Problème4 : Extrait du Bac 2006 T. S.Exp

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité **2cm**).

- 1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Montrer que la droite Δ_m d'équation : $y = -mx$ est une asymptote à la courbe (C_m) et déterminer la position de cette droite par rapport à (C_m) .
- 3) Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1) dans le repère.
- 4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$. Représenter la courbe (C_1') de $(g_1)^{-1}$.
- 5) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1) , la droite $\Delta_1: y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, ($\alpha < 1$).

Problème5 : Extrait du Bac 2002 T. S.Exp

- 1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$.
- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
 - Calculer les limites aux bornes de D_f et étudier les variations de f .
 - Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = |x - 1| \cdot \ln x$.
- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et écrire $g(x)$ sans le symbole valeur absolue.
 - Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
 - Etudier les variations de g (on utilisera la question 1 °)
 - La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? si oui, calculer $g'(1)$.
 - Tracer la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.
- 3) a) Prouver que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$, sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.
- 4) Représenter dans le même repère que (C) la courbe (C'') de g^{-1} .
- 5) a) Hachurer le domaine plan (D) limité par la courbe (C) de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.
b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine (D).

Problème6 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + e^{-2x} + xe^{-2x}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de f' .
b) En déduire le signe de $f'(x)$ dans $[0; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera. En déduire les positions relatives de (C) par rapport à (D).
- Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point $x_0 = 0$?
- Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique μ . Montrer que $1 \leq \mu \leq 2$.
- Représenter la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.
- Calculer en cm^2 l'aire A de la région du plan limitée par : (C), l'asymptote (D) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Problème7 :

Pour tout réel m , soit la fonction f_m de la variable réelle x définie par

$$f_m(x) = (x + 1)e^{mx}.$$

- Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes

- A** et **B** dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1} .
 - 3) Tracer dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique **2cm** les courbes (C_1) et (C_{-1}) de f_1 et f_{-1} .
 - 4) Donner une équation de la tangente (T) à (C_1) au point d'abscisse $x_0 = 0$.
 - 5) Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par (C_1) et (C_{-1}) et les droites d'équations :
 $x = -1$ et $x = 0$.

Problème8 :

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^{-x} - 1$.

- 1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .
- 3) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$.

B. Etude de la fonction f .

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = -x + 4 + xe^{-x}$. Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique **2 cm**.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Montrer que la droite $(\Delta) : y = -x + 4$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
- 3) Vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variation de f .
- 4) a) A l'aide du tableau de variation de f , déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions.
- 5) Tracer soigneusement la droite (Δ) et la courbe (C) .

C. Modélisation économique de la fonction f .

La fonction f modélise la demande d'un produit, x la quantité demandée de **0** à **4** milliers de tonnes, $f(x)$ le prix en Euros de ce produit en **kg**.

- 1) Justifier que pour $x \in [0; 4]$, $f(x)$ est positif.
- 2) La fonction d'offre de ce même produit est définie sur $[0; 4]$ par $h(x) = 0,5x + 2$, où x est la quantité et $h(x)$ le prix en Euros. Construire sa représentation graphique (A) dans le même repère que (C) .
- 3) Lire graphiquement le prix d'équilibre du marché de la quantité échangée à ce prix.
- 4) On suppose que la quantité produite au prix d'équilibre est $x = 1,55$.
a) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans $[0; 1,55]$. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?
b) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans $[1,55; 4]$. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?