

Module 2 : Fonctions numériques d'une variable réelle (Tsexp) (Compléments de cours)

I) Extension de la notion de limites

1) Limites par comparaison

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } u(x) \leq f(x) \text{ et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } f(x) \leq v(x) \text{ et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

$\text{et si } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

$u(x); v(x); f(x)$ sont des fonctions numériques et l un nombre réel

Exemple 1:

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

a) Etudier le signe de $x^2 - 1$ sur $]1; +\infty[$

b) Comparer sur $]1; +\infty[$, $x^2 - 1$ et x^2

c) En déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$ $x \leq f(x)$

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et comparer les résultats

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) Sachant que $-1 \leq \sin x \leq 1$, donner un encadrement de $f(x)$ pour tout $x \neq 0$

b) On note $u(x)$ et $v(x)$ les fonctions encadrent $f(x)$; calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Limite d'une fonction composée

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , g une fonction définie sur $f(I)$, a un élément de I ou une borne de I , l et l' deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow l} g(x) = l' \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l'$

Exemple 3 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

a) Ecrire $f(x)$ comme composée de deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$
($f(x) = v \circ u(x)$)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} u(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} v(x)$; puis $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) Utiliser les limites pour la recherche de l'asymptote oblique

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

(respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = 0$)

D'une manière générale :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ il ya possibilité d'asymptote oblique

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

- ✦ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe (ox)
- ✦ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe (oy)
- ✦ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
 - ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f
 - ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$

Exemple 4:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 8}{x + d}$

Déterminer les réels b et d sachant que la courbe représentative de f admet les droites $x = 3$ et $y = 2x$ comme asymptotes

II) Etude de la continuité sur un intervalle

1) Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , donc elle réalise une bijection de I sur $f(I)$, par suite elle admet une fonction réciproque notée f^{-1} qui est aussi une bijection de $f(I)$ sur I

Exemple 5 :

Soit la fonction $g(x) = \frac{2x^2 - 6x + 8}{x - 3}$

- a) Etudier les variations de la fonction g
- b) Calculer $g(7)$ et montrer que le point $I(3; 6)$ est un centre de symétrie à la courbe de g
- c) Montrer que la restriction h de g à l'intervalle $[5; +\infty[$ réalise une bijection de $[5; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser

2) Théorème des valeurs intermédiaires

- ✦ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, si c est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un réel x élément de $[a; b]$, tel que $f(x) = c$
- ✦ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, si $f(a) \times f(b)$ sont de signes contraires (c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$) alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a; b]$.

Exemple 6 :

Soit la fonction $t(x) = x^3 - 3x - 4$

- a) Etudier les variations de t et dresser son tableau de variation
- b) Montrer que l'équation $t(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$
- c) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} en utilisant la méthode par dichotomie
- d) En déduire le signe de $t(x)$ sur son domaine de définition

3) Continuité d'une fonction composée

Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue sur I , telle que $f(I) \subset I'$ et g une fonction continue sur I' , la fonction $g \circ f$ est continue sur I

III) Etude de la dérivabilité de fonctions

1) Dérivabilité d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$, la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et on a :
 $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Exemple 7 :

Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$

- Ecrire f comme composée de deux fonctions u et v avec $f(x) = v \circ u$
- Déterminer $f'(x)$

2) Dérivabilité de la réciproque d'une bijection

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle I , telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

- La fonction f réalise une bijection de I vers $f(I)$
- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]}$$

Exemple 8 :

Soit $f(x) = \frac{2x+3}{1+x}$

- Calculer $f(0)$
- En déduire $(f^{-1})'(3)$

3) Dérivabilité et points particuliers

✚ Points Anguleux

Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0 , la courbe de f admet au point $M(x_0; f(x_0))$ deux demi tangentes

Une demi-tangente à gauche d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Une demi-tangente à droite d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point **Anguleux**

✚ Point de rebroussement

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable, le point

$M(x_0; f(x_0))$ est un point de **rebroussement**. La courbe de f admet en ce point une demi tangente verticale

✚ Point d'inflexion

La courbe de f admet un point d'inflexion si la dérivée seconde de f s'annule en un point x_0 en changeant de signe. Le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point **d'inflexion**