
Cahier du professeur

Bonjour *Nombres complexes*

Par

Abdoulaye Drissa DEMBÉLÉ (ADD)

Adresse

Email : abdouldem25@gmail.com

Tél : (00223) 76 34 32 34

(00223) 66 34 32 34

Pour

Élève :

Tél :

Établissement :

Année scolaire : 2023~2024

Date : Bamako le 18 Juillet 2023

Nombres Complexes

Classe : TSE

Domaine : SMT

Discipline : Mathématiques

Thème : Nombres Complexes

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Pré évaluation : Compléter le tableau des angles remarquables

Situation Problème :

Y a-t-il un nombre dont son carré est égal à -1 ?

ADD

Contenus

Séquence 1 : Etude des nombres complexes	3
1.1. Notion de nombres complexes.....	3
1.2. Définition	3
1.3. Vocabulaires	3
1.4. Propriété.....	3
1.5. Représentation géométrique d'un nombre complexe.....	4
1.6. Opérations dans $\mathbb{C}$	4
1.7. Conjugué d'un nombre complexe :	6
1.8. Module d'un nombre complexe	8
Séquence 2 : Étude trigonométrique.....	9
2.1 Arguments d'un nombre complexe non nul.....	9
2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	12
2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe	13
2.4 Formule de Moivre	14
2.5 Formules d'Euler.....	15
2.6 Complément à la trigonométrie	15
2.7 Racines nièmes d'un nombre complexe :	17
Séquence 3 : Equations dans $\mathbb{C}$	18
3.1 Equation du premier degré dans $\mathbb{C}$	18
3.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$:	19
3.3 Equations se ramenant au second degré	22
Séquence 4 : Applications à la géométries.....	23
4.1 Configurations du plan et nombres complexes.....	23
4.2 Lieux géométriques et nombres complexes.....	25
4.3 Nombres complexes et transformations.....	27
Evaluation Générale	30
Exercices d'entraînement.....	30
Bac complexe TSE et STI de 2023 à 1999	37
Sujets de mes devoirs	45

Déroulement des activités

Pré évaluation

1. Complète le tableau des angles remarquables
2. Résous les équations suivantes dans l'ensemble donné :
 - a) $x - 1 = 0$ dans $\mathbb{N}$;
 - b) $x + 1 = 0$ dans $\mathbb{N}$;
 - c) $x + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}$;
 - d) $2x - 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}$;
 - e) $2x - 1 = 0$ dans $\mathbb{Q}$;
 - f) $x^2 - 3 = 0$ dans $\mathbb{Q}$;
 - g) $x^2 - 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$;
 - h) $x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$;
 - i) $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$;
 - j) $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Situation Problème :

- ☞ L'équation $x + 1 = 0$ n'admet de solution dans $\mathbb{N}$ mais dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$;
 - ☞ L'équation $2x - 1 = 0$ n'admet de solution dans $\mathbb{Z}$ mais dans un ensemble plus grand $\mathbb{Q}$;
 - ☞ L'équation $x^2 - 3 = 0$ n'admet de solution dans $\mathbb{Q}$ mais dans un ensemble plus grand $\mathbb{R}$;
 - ☞ L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet de solution dans $\mathbb{R}$: Crise dans $\mathbb{R}$ 😞!!!
- ⚙ Existe-t-il un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$? existe-t-il un nombre dont le carré est égal à -1 ?

Séquence 1 : Etude des nombres complexes

1.1. Notion de nombres complexes

Activité 1 : on considère les équations suivantes d'inconnues z :

- a) $z^2 + 1 = 0$; b) $z^2 + z + 1 = 0$; c) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Consignes

Suppose qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et résous les équations a) ; b) et c).

1.2. Définition

- ☞ On appelle nombre complexe tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.
 - ☞ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ Contient $\mathbb{R}$.
- Exemples : $3 + 2i$; $-2 - \sqrt{3}i$; $3i$; $\sqrt{2}$; 0 .

1.3. Vocabulaires

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$.

- ☞ L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique de z . Elle est unique
- ☞ Le réel a est appelé partie réelle de z et noté $Re(z)$.
- Le réel b est appelé partie imaginaire de z et noté $Im(z)$.

NB :

- Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit imaginaire pur.

Exemples :

- a) $z = -2 + 3i$, alors $Re(z) = -2$ et $Im(z) = 3$.
- b) $z = -\frac{1}{2}i$, alors $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -\frac{1}{2}$; z est imaginaire pur.
- c) $z = 5$, alors $Re(z) = 5$ et $Im(z) = 0$; z est réel.

1.4. Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

☞ $z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi sont égales.

☞ $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

☞ 0 est appelé nombre complexe nul.

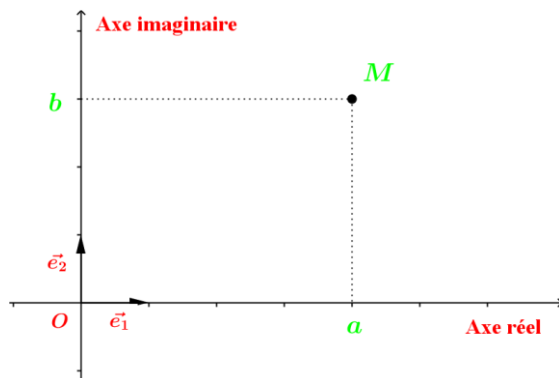
Activité 2 :

on donne $z = 3x + (y - 2)i$ et $z' = y + (5x - y)i$ où x et y sont des réels.

Détermine x et y pour que z et z' soient égaux.

1.5. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et $z = a + ib$ un nombre complexe où a et b sont des réels.



L'application qui à tout nombre complexe z associe le point $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers le plan.

L'application qui à tout nombre complexe z associe le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.

Retenons :

☞ L'image du nombre complexe $z = a + ib$ est le point $M(a; b)$. On note $M(z)$ ou $M(a + ib)$

☞ $z = a + ib$ est appelé affixe du point $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. On note z_M .

☞ Le vecteur-image du nombre complexe z est le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

☞ $a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

Activité 3 :

a. Place dans le plan complexe les images respectives A , B et C des nombres complexes :

$z_A = -1 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_C = 2i$.

b. Ecris les affixes des points $D\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $E\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)$ et $F\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

c. Ecris les affixes des vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = 3\vec{e}_1$.

d. Dessiner un représentant du vecteur-image de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_{\vec{u}'} = 2 + 3i$; $Z_{\vec{v}'} = -2 - 3i$ et $Z_{\vec{w}'} = 3i$.

1.6. Opérations dans $\mathbb{C}$

1.6.1 Aspects algébriques

Soient $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$;

☞ Addition : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

☞ Multiplication : $Z \times Z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

☞ Division : $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a')^2+(b')^2}$ avec $z' \neq 0$.

☞ Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$ avec $z \neq 0$

☞ L'opposé de tout nombre complexe $a + ib$ est le nombre complexe $-a - ib$.

Synthèse :

☞ La somme de deux nombres complexes, le produit de deux nombres complexes et la division de deux nombres complexes (si le dénominateur n'est pas nul) sont des nombres complexes.

On dit que l'addition, la multiplication et la division sont des lois de composition interne de $\mathbb{C}$.

☞ $(\mathbb{C}; +)$ est un groupe commutatif

☞ $(\mathbb{C}^*; \times)$ est un groupe commutatif

☞ La multiplication est distributive par rapport à l'addition. On dit que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif.

Méthode : Effectue des calculs sur les nombres complexes

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_4 = (2i)^{13}$$

$$z_5 = \frac{1}{4 - 2i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$

$$= 3 - 5i - 3i + 4$$

$$= 7 - 8i$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$

$$= -3 + 15i + 2i - 10i^2$$

$$= -3 + 15i + 2i + 10$$

$$= 7 + 17i$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$= 4 - 12i + 9i^2$$

$$= 4 - 12i - 9$$

$$= -5 - 12i$$

$$z_4 = (2i)^{13}$$

$$= 2^{13} i^{13}$$

$$= 8192 \times (i^2)^6 \times i$$

$$= 8192 \times (-1)^6 \times i$$

$$= 8192i$$

$$z_5 = \frac{1}{4 - 2i}$$

$$= \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)}$$

$$= \frac{4 + 2i}{16 - 4i^2}$$

$$= \frac{4 + 2i}{16 + 4}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_6 = \frac{1+i}{2-i}$$

$$= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{(1+i)(2+i)}{4+1}$$

$$= \frac{1}{5}(2+i+2i-1)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Activité 4 : Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $(1 + 3i) - (2 - 5i)$

b) $(1 - 2i)(2 + i)$

c) $i(2 - 3i)^2$

d) $\frac{3-2i}{1+i}$

e) $\frac{i}{-3+4i}$

f) $\frac{3+4i}{i}$

g) $\frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$

Activité 5 : Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- a) $i^5 + i^4 + i^3 + i^2 + i + 1$ c) $\sum_{k=0}^{2000} i^k$
b) $i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$ d) $\sum_{k=0}^{2014} (-i)^k$

1.6.2 Interprétations géométriques

Soit k un nombre réel ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$; A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

- L'affixe du vecteur somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces deux vecteurs :

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}.$$

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence $z_B - z_A$. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- L'affixe du vecteur $k\vec{u}$ est le nombre complexe $kz_{\vec{u}}$. $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$
- L'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est : $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du centre de gravité G du triangle ABC est : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
- Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, n$ points et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, n$ nombres réels dont la somme est non nulle ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

L'affixe du barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est : $z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$.

Activité 6 :

Dans le plan complexe on donne les points A, B et C d'affixes respectives $3 + i, -2 - i$ et $-1 + 4i$.

- a) Place dans le plan complexe les points A, B et C .
b) Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
c) Calcule l'affixe du milieu M du segment $[AB]$.
d) Calcule l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC .
e) Calcule l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.7. Conjugué d'un nombre complexe :

Activité 7 :

Soit $z = 1 + i$ un nombre complexe et M son point image dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. Soit M' le symétrique du point M par rapport à l'axe $(O ; I)$ et $\bar{z}$ l'affixe du point M' .

Détermine $\bar{z}$.

Synthèse :

Le complexe $\bar{z} = 1 - i$ est le conjugué du nombre complexe $z = 1 + i$.

• Définition

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

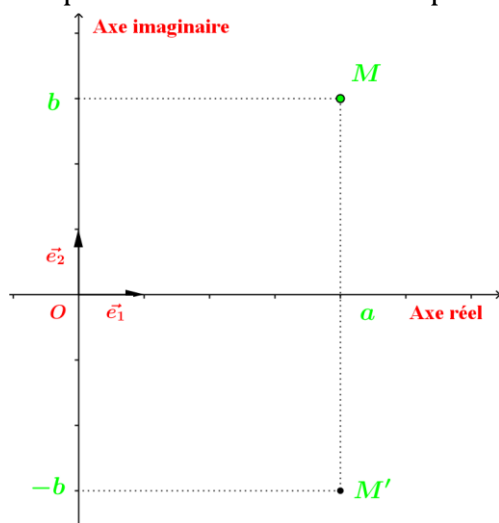
On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que : $\bar{z} = a - ib$.

Exemples :

- a) $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$ d) $\overline{-i} = i$
b) $\overline{-1 + i} = -1 - i$ e) $\overline{-5} = -5$
c) $\overline{3i - \sqrt{3}} = -3i - \sqrt{3}$

• **Interprétation géométrique**

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



• **Propriétés 1 :**

Soit z un nombre complexe tel que

$z = a + ib$. On a :

P1) $\bar{\bar{z}} = z$

En effet $\bar{\bar{z}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

P2) $z\bar{z} = a^2 + b^2$

On a : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib)$

$$= a^2 - (ib)^2$$

$$= a^2 - i^2 b^2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

P3) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

En effet $z + \bar{z} = a + ib + a - ib$

$$= 2a = 2\text{Re}(z)$$

P4) $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

On a : $z - \bar{z} = a + ib - (a - ib)$

$$= a + ib - a + ib$$

$$= 2ib$$

$$= 2i\text{Im}(z)$$

P5) z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

z est réel $\Leftrightarrow z = a$ d'où $\bar{z} = \bar{a} = a = z$.

P6) z est imaginaire pur si et seulement

Si $\bar{z} = -z$.

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = ib$ et $b \neq 0$ d'où

$$\bar{z} = \overline{ib} = -ib = -z.$$

• **Propriétés 2 :**

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

P1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

P2) $\overline{-z} = -\bar{z}$

P3) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$

P4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0)$

P5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

P6) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad (z \neq 0)$

Démonstrations :

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

P1) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$
 $= \overline{(a + a') + i(b + b')}$
 $= a + a' - i(b + b')$
 $= a - ib + a' - ib'$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

P2) $\overline{-z} = \overline{-a - ib} = -a + ib$
 $= -(a - ib) = -\bar{z}$

P3) On a : $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')}$
 $= \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)}$
 $= aa' - bb' - i(ab' + a'b)$
 $= aa' - iab' - bb' - ia'b$
 $= aa' - iab' + i^2 bb' - ia'b$
 $= a(a' - ib') - ib(-ib' + a')$
 $= (a - ib)(a' - ib')$
 $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$

P4) Si $z \neq 0$, on a : $z \times \frac{1}{z} = 1$

$$\Leftrightarrow \overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \text{ d'après P3)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

P5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

P6) .

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ avec $z \neq 0$. On a $z \neq 0$, donc $\overline{z^0} = 1$ et $(\bar{z})^0 = 1$; $\overline{z^0} = (\bar{z})^0$. L'égalité est vraie à l'ordre 0. Supposons l'égalité vraie à l'ordre n et montrons qu'elle l'est à l'ordre $n+1$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \bar{z} = (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$.

Elle est vraie à l'ordre $n+1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Pour $n < 0$, on a :

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\bar{z})^{-n}} = (\bar{z})^n.$$

• Méthode : Déterminer un conjugué

Détermine le conjugué des nombres suivants et exprime le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2-i)(i-5)$$

$$z_2 = \frac{3+2i}{i}$$

$$\bar{z}_1 = \overline{(2-i)(i-5)}$$

$$= \overline{(2-i)} \overline{(i-5)}$$

$$= (2+i)(-i-5)$$

$$= -2i - 10 + 1 - 5i$$

$$= -9 - 7i$$

$$\bar{z}_2 = \overline{\left(\frac{3+2i}{i}\right)}$$

$$= \frac{\overline{3+2i}}{\bar{i}}$$

$$= \frac{3-2i}{-i}$$

$$= \frac{(3-2i) \times i}{-i \times i}$$

$$= 2+3i$$

Activité 7 :

A. Ecris sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $(4 - i\sqrt{3})(1 + i)$

b) $\frac{(2-3i)(1+i)}{(2-i)^2}$

B. Soit $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$. (CIAM TSE)

Démontre, sans calcul, que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ un nombre imaginaire pur.

C. Les points A , B , M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i$, $-i$, z et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$.

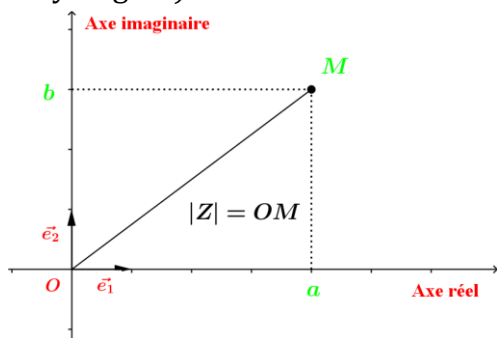
- Exprimez les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
- Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :
 - z' soit réel.
 - z' soit imaginaire pur.

1.8. Module d'un nombre complexe

Activité 8

On considère le plan complexe suivant et M le point image de z dans ce plan.

Exprime la distance $d(O, M)$ en fonction de a et b . (Indication : on pourra utiliser le théorème de Pythagore)



Synthèse :

La distance $d(O; M) = \sqrt{a^2 + b^2}$ est appelée module du nombre complexe z et noté $|z|$.

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples :

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
- $|-2i| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

• Interprétation géométrique :

- Si $z = a + ib$ est l'afixe d'un point M , on a : $|z| = OM$.
- Si z est l'afixe d'un vecteur $\vec{u}$, on a : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B , on a : $AB = |z_B - z_A|$.

• Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|zz'| = |z||z'|$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $z \neq 0$.
- $|z^n| = |z|^n$ avec $z \neq 0$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z \neq 0$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
(Inégalité triangulaire).

Remarque :

Pour tout nombre complexe z ,

- Si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

Activité 9 :

Calcule le module des nombres complexes suivants :

- $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-3 + 4i)$
- $\frac{3(2+i)}{(-1+i)^2}$

Séquence 2 : Étude trigonométrique

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

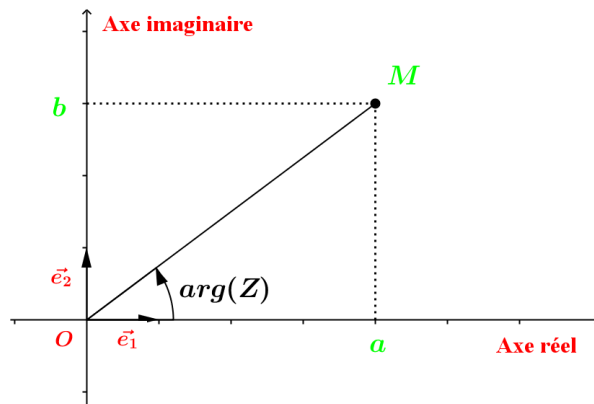
2.1 Arguments d'un nombre complexe non nul

Activité 10

Soit $z = 1 + i$ et A le point image de z dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- Place le point A dans le repère.

- b) Détermine le cosinus et sinus de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.
- c) Dédus en une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.



Synthèse

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

Notation :

Arguments de z est noté : $\arg(z)$

Remarque :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme.

Si α est un argument de z , on a : $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

On notera souvent $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$ (lire α modulo 2π)

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

• Recherche de $\arg(z)$:

Soit $z = a + ib$, a et b des réels, un nombre complexe.

- On calcule le module de z .
- Soit α un argument de z .

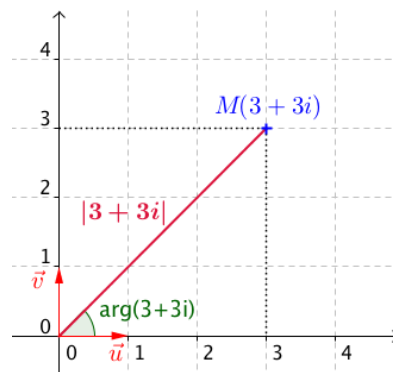
α est tel que : $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z|} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z|} \end{cases}$ utilisez le cercle trigonométrique.

Exemple :

Soit $z = 3 + 3i$.

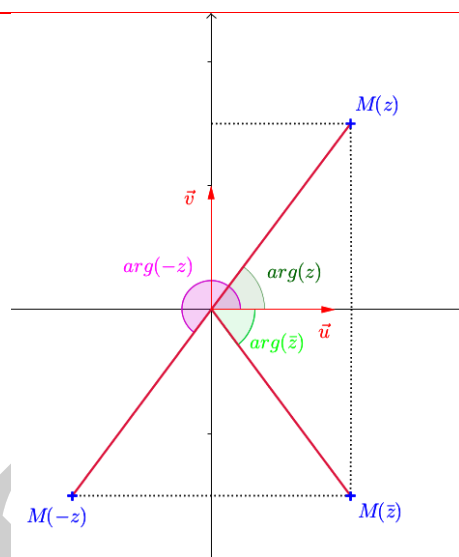
Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexe non nul et n et k entiers relatifs.

- 1-1) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = k\pi$
- 1-2) z est un nombre réel positif $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 + 2k\pi$
- 1-3) z est un nombre réel négatif $\Leftrightarrow \arg(z) = \pi + 2k\pi$
- 2-1) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 2-2) z est un imaginaire pur positif $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- 2-3) z est un imaginaire pur négatif $\Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- 3-1) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$
- 3-2) $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$
- 4-1) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$
- 4-2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$
- 5) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi = \arg\left(\frac{1}{z}\right)$
- 6) $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi$



Application à la géométrie

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . On a :

- $\arg(z_B - z_A) = \text{Mes}(\vec{e}_1, \vec{AB}) + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{Mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) + 2k\pi$

Cercle trigonométrique et le Tableau des angles remarquables trigonométriques

	Degrés	Radians	Sinus	Cosinus
	0°	0	0	1
	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
	180°	π	0	-1

Evaluation

A. Détermine l'angle α en radians, dans les cas suivants :

$$1) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases}$$

B. Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $\sqrt{3} + 3i$; b) $1 - i$; c) $2\sqrt{3} - 2i$; d) $-2 - 2i$; e) $-3i$; f) $2i$; g) 2 ; h) -5

C. Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}; z_2 = 2 + 2i; z_3 = -3 - i\sqrt{3}; z_4 = \frac{z_1}{z_2}; z_5 = z_2 \times z_1; z_6 = (z_2)^6; z_7 = \bar{z}_1;$$

$$z_8 = -7(\bar{z}_2)^6 \times \frac{1}{z_3}; z_9 = \frac{(z_1)^7 \times z_3}{3z_2}; z_{10} = \left(\frac{-5z_3}{z_1}\right)^3 2i.$$

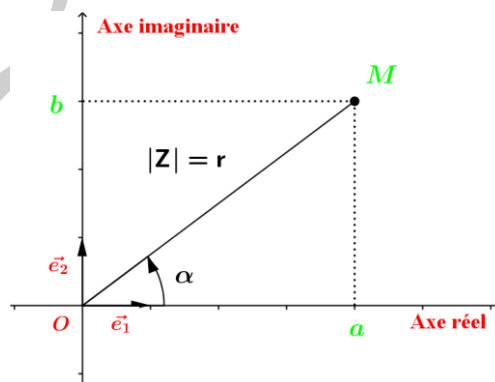
2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Activité 11 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M son image.

Désignons par r le module de z et α un argument de z . (Voir figure)

Consigne :

1. Exprime les réels a et b en fonction $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et r .
2. Dédus en la nouvelle écriture de z sans a et b .



Synthèse :

1. Dans le triangle OMN , on a : $\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$ et $\sin \alpha = \frac{MN}{OM}$.

Or $OM = |z| = r$; $ON = a$ et $MN = b$.

Donc $\cos \alpha = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r \cos \alpha$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r \sin \alpha$.

2. On en déduit que $z = a + ib$

$$z = r \cos \alpha + i r \sin \alpha \Leftrightarrow z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

☞ L'écriture $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est appelée forme trigonométrique de z .

☞ L'écriture $z = [r; \alpha]$ est appelée forme polaire de z .

Méthode

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

Remarque

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$

2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

• Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\alpha}$.

Méthode :

$$\begin{array}{lll} a) 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; & b) 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}; & c) 3 = 3e^{0i}; \\ d) -1 = e^{i\pi}; & e) 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}; & f) -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{array}$$

• Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\alpha}$ et $z' = r'e^{i\alpha'}$, n un entier relatif.

On a :

$$(1) zz' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$$

$$(3) z^n = r^n e^{in\alpha}$$

$$(2) \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\alpha}$$

$$(4) \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\alpha-\alpha')}$$

Remarque :

Si $z = re^{i\alpha}$, alors $\bar{z} = re^{-i\alpha}$.

Activité 12 :

Ecris sous formes exponentielle et trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{lll} a) (-1 + i\sqrt{3})(1 + i); & b) \frac{1}{-1 + i\sqrt{3}}; & c) (1 + i)^3; & d) \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \\ e) \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^2; & f) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right); & g) (-1 + i\sqrt{3})^8; & h) \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^3} \end{array}$$

Activité 13 :

A. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .

b) Ecris sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$.

c) Déduis en les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

B. Soient les nombres complexes : $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$

1) Ecrire Z_1 , Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire Z_3 sous forme algébrique.

3) Déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Activité 14 :

Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\cos \theta + i \sin \theta$; b) $2(\cos \theta - i \sin \theta)$; c) $-\cos \theta + i \sin \theta$; d) $-\cos \theta - i \sin \theta$

e) $-\sin \theta + i \cos \theta$; f) $1 + i \tan \theta$; g) $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$

Activité 15 : Complète le tableau ci-dessous

Formes algébriques de Z	Formes trigonométriques de Z	Formes Exponentielles de Z
$-3(1 + i\sqrt{3})$		
		$4e^{i(\frac{2\pi}{3})}$
	$2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$	

2.4 Formule de Moivre

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n , on a : $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

Démonstration

Soit $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

On a ; $|z| = 1$ et $\arg(z) = \alpha$.

Donc $|z^n| = 1$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) = n\alpha$.

D'où $z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Conclusion : $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

Pour $n = 2$ d'après la formule de Moivre $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$

D'après la formule du binôme de Newton $(\cos x + i \sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(\sin x \cos x)$

Par identification on a : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Rappels : triangle de Pascal et Binôme de Newton

☞ **Binôme de Newton**

Pour tout réels a et b et pour tout entier naturel n : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

triangle de Pascal : Le triangle de Pascal est une méthode très pratique utilisée pour le développement des identités $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$. Elle se présente comme suit :

n	Les coefficients du binôme de Newton												
0	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						

Méthode

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

2.5 Formules d'Euler

Soit α un nombre réel. On a :

$$\begin{cases} \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} & (1) \\ \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Méthode : soit $\alpha \in [0; \pi]$.

$$1 - e^{i\alpha} = 1 - e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}) = -e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})$$

$$= -2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}$$

$$1 + e^{i\alpha} = 1 + e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

Formules de Linéarisation

Soit un nombre complexe tel que $Z = \cos x + i \sin x$

$$Z = \cos x + i \sin x$$

$$Z = \cos x + i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$\bar{Z} = \cos x - i \sin x$$

$$Z + \bar{Z} = 2 \cos x$$

$$Z - \bar{Z} = 2i \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad ; \quad \sin x = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

De $Z^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ et $\bar{Z}^n = \cos(nx) - i \sin(nx)$

On déduit que :

$$Z^n + \bar{Z}^n = e^{inx} + e^{-inx} = 2 \cos(nx) \quad ; \quad Z^n - \bar{Z}^n = e^{inx} - e^{-inx} = 2i \sin(nx)$$

Remarque :

$$Z\bar{Z} = 1 \quad ; \quad Z^n \bar{Z}^n = 1 \text{ pour tout entier naturel } n$$

Activité 16

- Détermine la forme algébrique de : $A = (1 - i)^{2023}$; $B = (1 + i\sqrt{3})^{2024}$; $C = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{20}$.
- Exprime $\cos 5x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
- Linéarise : $\cos^3 2x$; $\sin^5 \frac{2}{3}x$; $\cos^3 x \times \sin^3 x$; $32 \cos^3 2x \times \sin^2 5x$; $\cos^2 3x \sin^3 \frac{2}{3}x$.
- Démontre que $x^2 - 2 \cos \alpha + 1 = (x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})$

2.6 Complément à la trigonométrie

2.6.1 Réduction de $a \cos x + b \sin x$ avec a, b, x réels

Posons $z = a + ib$, donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Soit α un argument de z .

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z|} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = |z| \cos \alpha \\ b = |z| \sin \alpha \end{cases}$$

Alors : $a \cos x + b \sin x = |z| \cos \alpha \cos x + |z| \sin \alpha \sin x = |z| (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$

D'où : **$a \cos x + b \sin x = |z| \cos(\alpha - x) = |z| \cos(x - \alpha)$**

Activité 17 :

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$

2) En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) On considère l'équation d'inconnue réelle x

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2.6.2 Formules trigonométriques

Activité 17 : soit $z = \cos x + i \sin x$ avec x et y réels.

a) Calcule de deux manières différentes z^2 .

b) Déduis en $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

Synthèse :

a) $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + i(2 \cos x \sin x)$

b) **$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \cos x \sin x \end{cases}$**

☞ **$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$** ; on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.

Pour $2x = X \Rightarrow x = \frac{X}{2}$; on a : **$1 + \cos X = 2 \cos^2 \left(\frac{X}{2}\right)$ et $1 - \cos X = 2 \sin^2 \left(\frac{X}{2}\right)$ et**

☞ **$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$** ; pour $2x = X \Rightarrow x = \frac{X}{2}$; on a : **$\sin X = 2 \cos \left(\frac{X}{2}\right) \sin \left(\frac{X}{2}\right)$**

• **Formules d'additions** : pour tout a et b réels on a :

$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ (1)	$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$ (3)
$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ (2)	$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$ (4)

• **Formules de transformations : Produit en somme** : pour tout a et b réels on a :

$$\cos(a) \cos(b) = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right) \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} [(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})]$$

$$= \frac{1}{4} [2 \cos(a + b) + 2 \cos(a - b)]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

- **Formules de transformations : Somme en Produit (factorisation) :** pour tout p et q réels on a :

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= (\cos p + i \sin p) + (\cos q + i \sin q) \\ &= (\cos p + \cos q) + i(\sin p + \sin q) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = p \quad \text{et} \quad \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} = q$$

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{p-q}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)} \right] \\ &= \left[\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \right] 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + i 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \begin{cases} \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

En utilisant $e^{ip} - e^{iq} = (\cos p - \cos q) + i(\sin p - \sin q)$ on a :

$$\begin{cases} \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

2.7 Racines nièmes d'un nombre complexe :

Activité 18

Soit les nombres complexes : $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = -i$

Consigne

1. Compare z_0^3 ; z_1^3 et z_2^3 .
2. Calcule la somme $z_0 + z_1 + z_2$.

Synthèse :

On a : $z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = i$ et $z_0 + z_1 + z_2 = 0$

Les nombres complexes z_0 , z_1 et z_2 sont les racines cubiques du nombre complexes i .

- **Définition :**

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle racine nième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

- **Propriétés**

Soit $Z = re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

- (1) Z admet n racines nièmes telles que : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

En effet, soit $z = \rho e^{i\theta}$ une racine nième de Z .

$$\text{On a : } z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

- (2) Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
- (3) La somme des n racines nièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

Remarque : Racines nièmes e l'unité

Soit $Z = 1$. Z admet n racines nièmes telles que : $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Méthode

- a) Déterminons les racines cubiques de : $4\sqrt{3} - 4i$

$$4\sqrt{3} - 4i = \left[8, -\frac{\pi}{6}\right]$$

Ainsi les racines cubiques de $4\sqrt{3} - 4i$ sont données par :

$$z_k = \sqrt[3]{8} e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{-\pi + 12k\pi}{18}\right)} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{Pour } k = 0, \quad z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{18}}$$

$$\text{Pour } k = 1, \quad z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{18}}$$

$$\text{Pour } k = 2, \quad z_2 = 2e^{i\frac{23\pi}{18}}$$

Activité 17

- A. Détermine les racines cubiques de $z = 4 + 4i\sqrt{3}$ puis place les points images des solutions dans le plan complexe.
- B.
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$.
- b) Ecrire chacune des solutions sous forme algébrique et vérifier que leur somme est nulle.

• Théorème :

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$). Si z_0 est une racine nième de Z alors on obtient toutes les autres racines nième de Z en multipliant successivement z_0 par les racines nième de de l'unité.

Activité 19

- a) Calcule $(2 + i)^3$
- b) Déduis en les racines cubique de $Z = 2 + 11i$

Séquence 3 : Equations dans $\mathbb{C}$

3.1 Equation du premier degré dans $\mathbb{C}$

- **Définition**

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $aZ + b = 0$.
Avec ($a \neq 0$ et $a \in \mathbb{C}$)

- **Résolution**

L'ensemble solution de l'équation $aZ + b = 0$ est $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

Méthode

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3$.

$$(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3 \Leftrightarrow (1 + 2i)Z - iZ = (i - 1) - 3$$
$$\Leftrightarrow Z(1 + i) = -4 + i \Leftrightarrow z = \frac{-4 + i}{1 + i} \Leftrightarrow z = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i \right\}$$

2. Résous dans $\mathbb{C}$; $5z - \bar{z} = 4 = 3i$

3.2 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$:

Définition : Soit a, b et c des nombres complexes avec $a \neq 0$.

On appelle équation du second degré toute équation de la forme ou pouvant se ramener à la forme $az^2 + bz + c = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$.

3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racines carrées de Z , tout nombre complexe Z tel que $Z = Z^2$.

Méthode

Soit $z = a + ib$ une racine carrée de $Z = x + iy$.

$$\text{Donc } z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = |Z| \quad (*)$$

$$\text{et } z^2 = Z \Leftrightarrow (a + ib)^2 = x + iy \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = x + iy \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \text{Re}(Z) \quad (**)$$

$$\text{et } 2ab = \text{Im}(Z) \quad (***)$$

$$(*); (**) \text{ et } (***) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = |Z| \\ a^2 - b^2 = \text{Re}(Z) \\ 2ab = \text{Im}(Z) \end{cases}$$

Pratique :

Activité 18 : A vous de jouer !

Calculer les racines carrées de $3 - 4i$; $-15 + 8i$; $-4i$; i .

3.2.2 Résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Activité :

Dans chacun des cas suivants mettre sous la forme canonique puis résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 + 4z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

Synthèse :

Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathbb{C}$.

Propriété 1: cas où Δ est un réel

- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration :

On met le trinôme sous sa forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (\text{Voir cours de la classe de 11^{ème} S})$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \quad (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\text{- Si } \Delta \geq 0 : \quad z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$\text{soit : } z = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \text{ ou } z = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$\text{L'équation a deux solutions réelles : } z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{- Si } \Delta = 0 : \text{ L'équation peut s'écrire : } \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\text{L'équation n'a qu'une seule solution réelle : } z_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{- Si } \Delta < 0 : \text{ L'équation peut s'écrire : }$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2} \text{ car } i^2 = -1$$

donc : $z + \frac{b}{2a} = i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$ car $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$

et donc : $z = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ ou $z = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$

L'équation a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Propriété 2: cas où Δ est un nombre complexe non nul et non réel

Soient δ_1 et δ_2 les deux racines carrées de Δ . Alors l'équation admet deux solutions complexes tels que :

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$$

Méthode : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résolvons dans les équations suivantes :

a) $z^2 + 5 = 0$ b) $z^2 + 3z + 4 = 0$ c) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; d) $-2Z^2 + Z + 1 = 0$;
e) $Z^2 - 4Z + 4 = 0$; f) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$ g) $(2i)Z^2 - 3z - (1 + 3i) = 0$

a) $z^2 + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = -5$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5i^2$$

$$\Leftrightarrow z = i\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{5}$$

Les solutions sont donc $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.

b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant Δ du trinôme : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

c) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{ 1 - 2i ; 1 + 2i \}$$

d) $-2Z^2 + Z + 1 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9 = (3)^2$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{ -2 ; 1 \}$$

e) $Z^2 - 4Z + 4 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{ 2 \}$$

f) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$$\Delta = [-4(1 + i)]^2 - 4(4)[- (45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i) = 720 + 448i$$

$$\delta_1 = -28 - 8i \quad \delta_2 = 28 + 8i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ -3 - \frac{1}{2}i ; 4 + \frac{3}{2}i \right\}$$

g) $(2i)Z^2 - 3Z - (1 + 3i) = 0$

$$\Delta = -15 + 8i. \text{ Cherchons les racines carrées de } \Delta.$$

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$. On a $|\Delta| = 17$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & (1) \\ x^2 - y^2 = -15 & (2) \\ 2xy = 8 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x^2 = 1; x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Dans (3) :

Si $x = 1$ alors $y = 4$; donc $\delta_1 = 1 + 4i$

Si $x = -1$ alors $y = -4$; donc $\delta_2 = -1 - 4i$

$$z_1 = \frac{3 + 1 + 4i}{4i} = \frac{4 + 4i}{4i} = \frac{1 + i}{i} = \frac{-1 + i}{-1} = 1 - i; \quad z_1 = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{3 - 1 - 4i}{4i} = \frac{2 - 4i}{4i} = -1 - \frac{1}{2}i; \quad z_2 = -1 - \frac{1}{2}i$$

L'ensemble solutions de l'équation est $S_{\mathbb{C}} = \left\{ 1 - i; -1 - \frac{1}{2}i \right\}$

Activité 19 : A vous de jouer

a) $z^2 + z + 1 = 0$; b) $iz^2 - iz - 3 - i = 0$; c) $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$

3.3 Equations se ramenant au second degré

Exemple 1

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$, sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Exemple 3

Soit l'équation (E): $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exemple 4

Soit l'équation (E): $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

a) Démontre que (E) est équivalente au système $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

- b) Résous (E) dans $\mathbb{C}$, l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$.
c) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) .

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 1) $-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 3 = 0$; 2) $\frac{2z-i}{z-2i} = z$; 3) $(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0$
4) $z^6 - (1+i)z^3 - i = 0$ 5) $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$;

Séquence 4 : Applications à la géométries

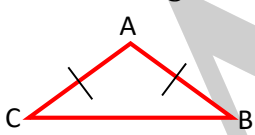
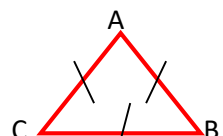
4.1 Configurations du plan et nombres complexes

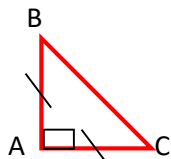
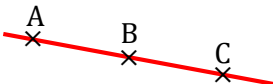
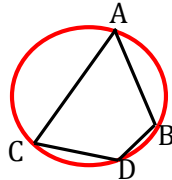
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A; Z_B; Z_C; Z_D$.

- Vecteurs orthogonaux- vecteurs colinéaires**

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $-\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est imaginaire pur.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv 0[2\pi]$ ou $\pi[2\pi] \Leftrightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est un réel.

- Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes**

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A 	$AB = AC$ et $\text{Mes}(\hat{A}) = \alpha$ $(\alpha \in]0; \pi[)$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC$ Et $\text{Mes}(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A 	$\text{Mes}(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \pm ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$

Triangle ABC rectangle et isocèle en b 	$AB = AC$ Et $Mes(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
Points A, B, C alignés 	$Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	$Mes(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ $\equiv Mes(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) [\pi]$ $(Mes(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \neq 0[\pi])$	$\frac{Z_{BC}}{Z_{AC}} \div \frac{Z_{BD}}{Z_{AD}} \in \mathbb{R}^*$ i.e. $\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \div \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \in \mathbb{R}^*$

NB : Si les points A, B, C, D cocycliques et si trois de ces quatre points forment un triangle rectangle alors l'hypoténuse de ce triangle est un diamètre du cercle.

Evaluation

Exemple 1

Soit les complexes $-1 - i$; $1 + i$; $-1 + i$ d'images respectives les points A ; B ; C. Détermine la nature du triangle ABC.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$. Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exemple 3

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).
- 2) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

Exemple 4

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

- 1) Etudier la nature des triangles ACD, BCD et ABC.
- 2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Donne une équation de (C).

Exercice : (composition TSE 2014-2015 R.G.)

On considère le polynôme f défini par : $f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que : $f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$ (0,75 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1 pt)
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$; $z_D = \bar{z}_C$.
 - a) Placer les points A, B, C, D . [la figure complète (1,5 pts)]
 - b) Quelle est la nature du triangle ACD ? (0,5 pt)
 - c) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C) . (1,5 pts)
4. On note E le symétrique de C par rapport à O .
Préciser l'affixe de E et déterminer la nature du triangle BED . (0,75 pt)

4.2 Lieux géométriques et nombres complexes

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Soit les complexes Z_A ; Z_B ; z d'images respectives A ; B ; M .

- L'ensemble des points M tels que $|z - Z_A| = r$ ($r > 0$) $\Leftrightarrow AM = r$ est le cercle de centre le point A et de rayon r .
- L'ensemble des points M tels que $|z - Z_A| \leq r$ ($r > 0$) $\Leftrightarrow AM \leq r$ est le disque de centre le point A et de rayon r .
- L'ensemble des points M tels que $|z - Z_A| = |z - Z_B| \Leftrightarrow AM = BM$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Si α est un nombre réel, l'ensemble des points M tels que $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$ est la droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A , avec $Mes(\vec{e}_1, \vec{u}) \equiv \alpha[\pi]$.
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$ est la droite (AB) privée de A et B .
- Soit $z' = \frac{z - z_B}{z - z_A}$.
 - ✓ z' un est réel $\Leftrightarrow \arg(z') \equiv 0[\pi]$ ou $z' = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$ ou $z - z_B = 0$
 $\Leftrightarrow M$ parcourt la droite (AB) privée de A .
 - ✓ z' est un réel positif non nul $\Leftrightarrow \arg(z') \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow M$ parcourt la droite (AB) privée du segment $[AB]$.
 - ✓ z' est un réel négatif non nul $\Leftrightarrow \arg(z') \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow M$ parcourt le segment $[AB]$ privé de A et B .
 - ✓ z' un est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $z' = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $z - z_B = 0$
 $\Leftrightarrow M$ parcourt le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A .

Remarque

L'ensemble des points M tels que $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[2\pi]$ est la demi droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A , avec $Mes(\vec{e}_1, \vec{u}) \equiv \alpha[2\pi]$.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

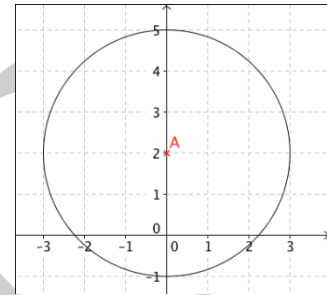
Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 2') L'ensemble des points M tels que $|(1 + i)z - 2i| = 2$
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
- 4) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}(\pi)$.

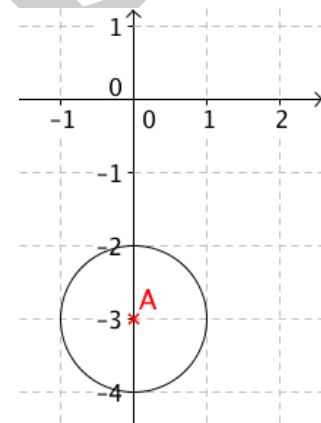
Solution

1) Soit A le point d'affixe $2i$ alors $|z - 2i| = 3$ est équivalent à $AM = 3$.
L'ensemble des points M est le cercle de centre A($2i$) et de rayon 3.



$$2) |iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i||z + 3i| = |z + 3i|$$

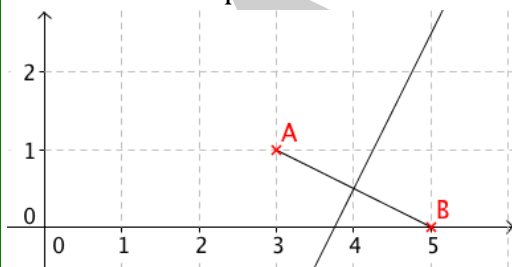
Soit A le point d'affixe $-3i$ alors $|z + 3i| = 1$ est équivalent à $AM = 1$.
L'ensemble des points M est le cercle de centre A($-3i$) et de rayon 1.



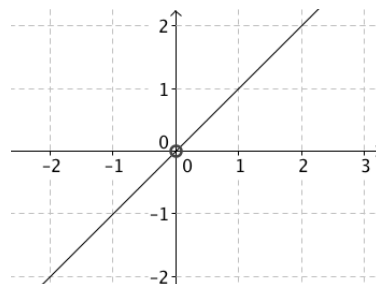
$$3) |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{z - 3 + i}| = |\overline{z} - 3 - i| = |z - 3 - i|$$

Soit A le point d'affixe $3+i$ et B le point d'affixe 5 alors $|z - 3 - i| = |z - 5|$ est équivalent à $AM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB].



4) L'ensemble des points M est la bissectrice de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées privée de l'origine.



Evaluation

Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, détermine et représente :

1. L'ensemble des points M tels que $\arg(z - 1 - i) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

- L'ensemble des points M tels que $\arg(z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k est un entier relatif
- L'ensemble des points M tels que $\arg(2\bar{z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k est un entier relatif
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z+1-2i}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [\pi]$
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z-2+i}{z+1-2i}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z+2i}\right) \equiv 0 [\pi]$
- L'ensemble des points M tels que $\arg\left(\frac{z+3-i}{z+2i}\right) \equiv \pi [2\pi]$

Exercice 2

Les considère les points $A(2 - 4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}; \quad z \neq -i$$

- Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
- Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
 - z' soit un réel.
 - z' soit un imaginaire pur.
- Détermine géométriquement l'ensemble des points M tels que :
 - z' soit un réel.
 - z' soit un réel non nul.
 - z' est un réel strictement positif.
 - z' est un réel strictement négatif.
 - z' soit un imaginaire pur.
 - M' parcourt le cercle de centre 0 et de rayon 1
- On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$.
 - Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$.
 - Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
 - Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle.

4.3 Nombres complexes et transformations

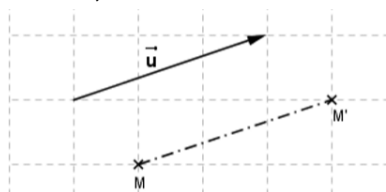
Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs Z et Z' .

4.3.1 Translation

La transformation : $f(Z) = Z' = Z + b$, avec $b \in \mathbb{C}$, définie M' comme l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .

En effet,



$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z' - Z = Z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow Z' = Z + Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow Z' = Z + b \text{ avec } Z_{\vec{u}} = b \end{aligned}$$

Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $Z_{\vec{u}} = 2 + i$.

Soit M' le point d'affixe Z' , image de M d'affixe Z par la translation t .

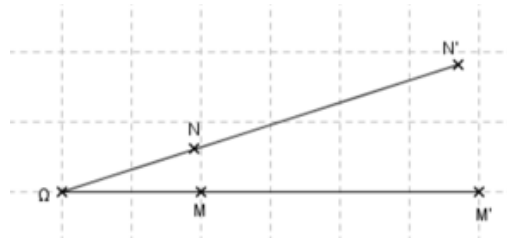
L'écriture complexe de la transformation t est : $Z' = Z + Z_{\bar{u}}$

$$Z' - Z = 2 + i \Leftrightarrow \mathbf{Z' = Z + (2 + i)}.$$

4.3.2 Homothétie

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$) et de centre Ω est :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \mathbf{Z' - Z_{\Omega} = k(Z - Z_{\Omega})}$$

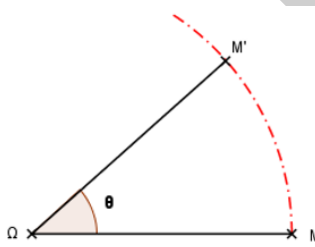


Remarque :

Si $k = -1$ alors l'homothétie de rapport -1 et de centre Ω est une symétrie centrale de centre Ω .

4.3.3 Rotation

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre Ω est :



$$\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta} \overrightarrow{\Omega M}, \quad \mathbf{Z' - Z_{\Omega} = e^{i\theta}(Z - Z_{\Omega})}$$

4.3.4 Similitude directe du plan

Expression complexe

Toute similitude directe S du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' peut s'écrire sous la forme $Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes).

Éléments caractéristiques

- Le rapport $k = |a|$
- L'angle $\theta = \arg(a)$
- le centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$. Le centre Ω correspond à l'ensemble des points invariants par S .

S est alors dite **similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k** .

4.3.5. Similitude indirecte du plan

Toute similitude indirecte S du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' peut s'écrire sous la forme $Z' = a\bar{Z} + b$ (où a et b sont des complexes).

☞ **1^{er} cas : $|a| = 1$**

Si $|a| = 1$ alors S est une symétrie orthogonale d'axe (D) (ou la réflexion d'axe (D)) où (D) correspond à l'ensemble des points invariants par S .

☞ **2^{ème} cas : $|a| \neq 1$**

Si $|a| \neq 1$ alors S est une similitude indirecte caractérisée par :

- le rapport $k = |a|$

- le centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$
- l'axe $(\Delta) : y = mx + p$ tels que $m = \frac{\text{Im}(a)}{\text{Re}(a) + |a|}$ et $\Omega \in (\Delta)$.

S est alors dite similitude indirecte de centre Ω , de rapport k et d'axe (Δ) .

Evaluation

Exercice 1

Pour chacune des transformations S suivantes, donne la nature et les éléments caractéristiques.

- 1) $z' = z - 1 + 3i$; 2) $z' = 2z + 3i$; 3) $z' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}z$; 4) $z' = -2iz + 3i$; 5) $z' = -z - 6i$;
6) $z' = -iz + 1$; 7) $z' = (1 + i)\bar{z} + 5$; 8) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$; 9) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\bar{z} - 6i$.

Exercice 2

Soit la similitude directe plane S de centre $A(1 ; 1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z' .

1. Exprime Z' en fonction de Z .
2. Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. Donne l'expression analytique de S .

Exercice 3

Soient A, B, C et D les points d'affixes :

$Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

- 1) Détermine l'écriture complexe associée à S .
- 2) Caractérise S .
- 3) Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. Donne l'expression analytique de S .
- 4) Détermine l'image par S :
 - a. de la droite (AB) .
 - b. de la droite $(D) : x - 2y + 3 = 0$
 - c. du cercle de centre A et de rayon AB .
 - d. du cercle $(C) : 2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y + 4 = 0$.

Exercice 4

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la transformation T qui à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M' de

coordonnées $(x' ; y')$ vérifiant : $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1. Trouve l'écriture complexe de T .
2. T est-elle une similitude directe ou indirecte ? Caractérise donc T .

Evaluation Générale

Exercices d'entraînement

Exercice 1

1. Mets sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_0 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i); \quad z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3; \quad z_2 = (1 - 2i)^5; \quad z_3 = (1 - i)^{14};$$

$$z_4 = (1 + i)^{13}; \quad z_5 = \frac{2 + i}{3 + 4i} - \frac{3 - 4i}{2 - i}; \quad z_6 = \frac{(1 - i)(2 + i)}{2i(-3 + i)}; \quad z_7 = \sum_{k=7}^{2000} i^k; \quad z_8 = \sum_{k=5}^{2002} (-i)^k$$

2. On donne $z = 2 + i\sqrt{2}$ et $z' = -2 + i$. Ecrire sous forme algébrique les complexes :

$$z_0 = z - \bar{z}'; \quad z_1 = z\bar{z}; \quad z_2 = z^2; \quad z_3 = z'^3; \quad z_4 = z'^5; \quad z_5 = \bar{z}'^4; \quad z_6 = \frac{z}{z'}; \quad z_7 = -3z'^3 \times \frac{z}{z'}$$

3. Montrer que $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = 1$.

4. Soit $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontre, sans calcul, que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ un nombre imaginaire pur

5. Démontre que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$ est réel.

Exercice 2

- A. Détermine les entiers naturels n tels que $(1 + i)^n$ soit un réel négatif

- B. Soit α et α' deux nombres complexes de module 1. Démontre que :

a. $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

b. $u = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha}$ est réel. (0,75 pt)

c. $v = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\alpha'}$ est réel pour $\alpha\alpha' \neq -1$. (0,75 pt)

- C. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on pose $z_1 z_2 = u^2$.

On suppose que $\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2}$.

1. En posant $\text{Arg}(z_1) = \theta$, exprime $\text{Arg}(u)$ en fonction de θ .

2. Montre que le nombre $t = \frac{z_1 + z_2 + i(z_1 - z_2)}{u}$ est un réel.

Exercice 3

Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexes z dans les cas suivant :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad z_3 = (-1 + i\sqrt{3})^8;$$

$$z_4 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{i - 1}\right)^6; \quad z_5 = \frac{(1 - i\sqrt{3})^4}{(-1 - i)^3}; \quad z_6 = \frac{(\sqrt{3} + i)^9(1 - i)}{-8(1 + i)^2}.$$

Exercice 4

- A. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$z_6 = \sin \theta + i \cos \theta$$

$$z_2 = 2 \cos \theta - 2i \sin \theta$$

$$z_7 = 1 + i \tan \theta \text{ avec } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$z_3 = -\cos \theta + i \sin \theta$$

$$z_7 = 1 - i \cotan \theta \text{ avec } \theta \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$z_4 = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$z_7 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$$

$$z_5 = -\sin \theta + i \cos \theta$$

$$z_7 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$$

- B. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{5}}; z_2 = 1 - e^{i\alpha}; z_3 = 1 + e^{i\alpha}; z_4 = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}; z_5 = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}.$$

C. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$a) \begin{cases} |z| = 5 \\ \arg((-1 + i)z) = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad b) \begin{cases} |z| \times |2i| = 6 \\ \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

D. Détermine le module et un argument de

$$Z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)}; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. Met sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$

2. Déduis en que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 6

A. Soient z et u deux nombres complexes tels que :

$$z = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad u = \sqrt{2}(1 + i)$$

On pose : $X = u \times z^2$

1. a. Détermine le module et l'argument principal de z et u .

b. Déduis en le module et l'argument principal de X .

2. a. Ecris X sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b. Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

c. Calcule X^{12} .

Exercice 7

E. Détermine la forme algébrique de : $A = (1 + i)^{2011}$; $B = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{20}$.

F. Exprime $\cos 5x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

G. Linéarise : $\cos^3 2x$; $\sin^5 \frac{2}{3}x$; $\cos^3 x \times \sin^3 x$; $\cos^3 2x \times \sin^2 5x$; $\cos^2 3x \sin^3 \frac{2}{3}x$; $\cos^3 \frac{2}{5}x \sin^2 \frac{2}{3}x$

Exercice 8

Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$f(z) = z' = \frac{z - 2 + i}{z + 1 - i}$$

1) Détermine les nombres complexes pour lesquels f est définie.

2) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Ecris z' sous forme algébrique

3) Détermine et construis l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) (E_1) : z' soit un réel.

- b) (E_2) : z' soit un nombre imaginaire pur.
c) (E_3) : M' parcourt le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 9

Pour tout nombre complexe $z = x + iy \neq i$; on pose $z_0 = \frac{z+i}{z-i}$

Détermine et représente les ensembles de points M du plan dont l'afixe z vérifie condition indiquée.

1. z_0 est un réel strictement positif.
2. z_0 est un réel strictement négatif.
3. z_0 est un nombre imaginaire pur.
4. $|z_0| = 1$
5. $|z_0| = 3$

Exercice 10

1. Détermine les nombres complexes z dans les cas suivants :
 - a. $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$.
 - b. $|z| = |z - 2|$ et $\arg(z) = \arg(z + 3 + i)$.
 - c. $z + |z| = 1 + 2i$.
2. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan dont l'afixe z vérifie la condition proposée
 - a) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; b) $|z - 3i| = 2$; c) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$;
 - d) $|z + \bar{z} - 1| = 4$; e) $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$; f) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$
3. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan dont l'afixe z vérifie la condition proposée
 - a) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$; b) $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$; c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$;
 - d) $\arg(z - 1 - i) \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi]$; e) $\arg(3i - z) \equiv 0 [2\pi]$; f) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$

Exercice 11

On considère le polynôme f défini par : $f(z) = iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i$; $z \in \mathbb{C}$

- 1) Montre que f admet une racine imaginaire pure z_0 à déterminer.
- 2) Détermine les nombres complexes a , b et c tels que :
 $f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$
- 3) Résous l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus grande partie réelle et z_2 la troisième.
- 4) Dans le plan rapporté au repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé (unité graphique : 3cm), on considère les points M , A et L d'afixes respectives z_2 ; z_1 ; z_0 .
 - a) Place les points M , A , L . (1 pt)
 - b) Calcule $\vec{MA}$, $\vec{ML}$, $\vec{AL}$ et $MES(\widehat{MAL})$. Déduis en la nature du triangle MAL .
 - c) Détermine z l'afixe du point I tel que le quadrilatère $MALI$ soit un parallélogramme. Place le point I .

Exercice 12

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

- 1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1
- 2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$.
- 3) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

5) On note z_3 la 3^{ème} solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 13 : (composition TSE 2014-2015 R.G.)

On considère le polynôme f défini par : $f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

5. Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que : $f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$ (0,75 pt)

6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1 pt)

7. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$; $z_D = \bar{z}_C$.

d) Placer les points A, B, C, D. [la figure complète (1,5 pts)]

e) Quelle est la nature du triangle ACD ? (0,5 pt)

f) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C). (1,5 pts)

8. On note E le symétrique de C par rapport à O.

Préciser l'affixe de E et déterminer la nature du triangle BED. (0,75 pt)

Exercice 14 : Extrait du Bac 2013 T. S.Exp (Mali)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0; \quad z + \frac{1}{z} = 1; \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

2. Soit le polynôme de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

a) Vérifier que pour tout z non nul on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$

Exercice 15

On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

a. Ecrire $1 + i$ sous forme trigonométrique.

b. Calculer $p(1 + i)$.

c. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$

d. Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation.

e. Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.

f. Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16

A. Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(E): z^2 - (2^{\alpha+1} \cos \alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Donne la forme trigonométrique de chaque solution.

B. Soit $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. on considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(F): (\cos^2 \beta)z^2 - (4 \cos \beta)z + 5 - \cos^2 \beta = 0$$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (F). Précise pour quelle valeur de β l'équation (F) admet une solution double. Donne la valeur de cette racine double.

Exercice 17

Soit l'équation (E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$.

1. Montre que si z_0 est une solution de (E) alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (E).

2. a. détermine les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0.$$

b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z , $Z^2 + aZ + b = 0$ puis l'équation (E).

c. Démontre que les points images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (Γ) dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 18 : (composition TSE 2014-2015 R.D.)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = \bar{a}$ et $c = 3$.

Partie A :

1. Place les points A, B et C .

2. Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

3. Ecris les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.

Partie B :

Soit f l'application qui, à tout point M de P d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = f(z) = \frac{1}{3}iz^2$$

On note A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points A, B et C .

1. a. Détermine la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C' .

b. Démontre l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A' .

c. Place les points A', B' et C' .

2. Détermine les points invariants par f , c'est-à-dire les points d'affixe z tels que $z' = z$. On donnera leurs affixes sous forme algébrique.

3. Démontre que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}.$$

Exercice 19 : Extrait du Bac Asie 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$f(z) = z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soient A, B et C les points d'affixe respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Soit C' l'image du point C par f . Donne l'affixe c' du point C' sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. Calcule l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on note p le module de $z + 1$ (c'est-à-dire $|z + 1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est-à-dire $|z' + i| = p'$).

- a. Démontre que pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.
- b. Si le point M appartient au cercle (r) de centre A et de rayon 2, montre qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (r') , dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$
 - a. Interprète géométriquement le module et l'argument du nombre complexe ω .
 - b. Montre que $z' = -i\omega$.
 - c. Détermine géométriquement l'ensemble (F) des point M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul. Donne une équation de (F) .
 - d. Vérifie que le point D appartient aux ensembles (r) et (F) .
 - e. Représente les ensembles (r) et (F) et (r') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 20

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et -2 . On appelle (τ) le cercle de diamètre $[AB]$ et I le milieu $[AB]$.

1. Soit C le point d'affixe $c = \frac{1+4i}{1-2i}$. Détermine la forme algébrique de c et prouve que le point C appartient à (τ) .
2. Soit D le point de (τ) tel que $(\widehat{IA, ID}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par d l'affixe de D .
 - a. Détermine le module et un argument de $d + \frac{1}{2}$.
 - b. Déduis-en d .
 - c. Détermine le réel x telque $\frac{1+2xi}{1-xi} = \frac{1}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit E un point d'affixe $e = \frac{1+2yi}{1-yi}$ où y est un réel non nul. On pose $Z = \frac{e-1}{e+2}$. Calcule Z et déduis en la nature du triangle ABE .
4. Soit F un point de (τ) autre que B et f son affixe. Démontre qu'il existe un réel t tel que
$$f = \frac{1+2ti}{1-ti}.$$

Exercice 21

- A. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
 - a) $z^3 = 8i$ b) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; c) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+i)$; d) $z^4 = 2(-1+i\sqrt{3})$
- B. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1-2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Placer les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- C. On pose : $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$
 - a. Calculer Z^2 puis déterminer son module et son argument
 - b. En déduire de ce qui précède le module et un argument Z .
- D. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.

Exercice 22

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Démontre que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.
2. Calcule les réels $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$. Déduis en que α et β sont solutions de l'équation (E) : $z^2 + z - 1 = 0$.

3. Exprime α et β en fonction respectivement de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$. Puis précise le signe de α et celui de β .
4. Résous (E) et déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 23

Soit α un nombre réel.

- 1) Montre que l'équation $(E_1): z^2 - (2 \cos \alpha)z + 1 = 0$ d'inconnue z admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions complexes conjuguées, z_1 et $\bar{z}_1$. Donner leur expression en fonction de α . Quel est le module de z_1 ? (1 pt)
- 2) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On note de même z_2 et $\bar{z}_2$ les solutions de l'équation $(E_2): z^2 - (2 \cos \beta)z + 1 = 0$. Calculer en fonction de $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ les coefficients a, b, c et d du polynôme $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ soit identique au polynôme $Q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$ (1 pt)
- 3) On considère l'équation $(E_3): X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0$ où a et b sont les coefficients réels de la question 2).
- a) Montrer que $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ sont solutions de (E_3) . (0, 5 pt)
- b) Ecrire les inégalités que doivent vérifier a et b pour qu'il existe deux réels α et β répondant à la question. (0, 5 pt)
- 4) Application : Soit $(E_4): z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$. Déterminer α et β et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_4) . (2 pts)

Bac complexe TSE et STI de 2023 à 1999

Bac SE 2023 (Mali)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2 + 2i$ et $Z_B = (1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$

- 1) Ecris le nombre complexe $\frac{Z_A}{Z_B}$ sous sa forme algébrique.
- 2) a) Calcule les distances OA et AB .
b) Compare $4 + 2\sqrt{3}$ et $(1 + \sqrt{3})^2$ puis calcule la distance OB .
c) Détermine en radian, la mesure principale de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$ puis celle de $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$. Déduis-en une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
- 3) En utilisant les questions précédentes, donne les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) a) Détermine l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 2(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère $OABD$? Justifie ta réponse.
Pour la construction de la figure, prends $\sqrt{3} = 1,7$.

Bac SE 2022 (Mali)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1 + 3i$, $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distinct de z_A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$.

1. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 3iz - 2 = 0$.
2. Détermine les affixes des points invariants par f .
3. Détermine l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
4. En posant $z = x + iy$, détermine $Im(z')$ en fonction de x et y . Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5. a. Montre que pour tout $z \neq -1 + 3i$, on ait l'équivalence :
$$\frac{z+2}{z+1-3i} = -\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z-z_C)(\bar{z}-\bar{z}_C) = \frac{5}{2}$$

b. Déduis-en l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure.

Bac SE 2021 (Mali)

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (-14 + 39i)z + 50$.

1. Démontre que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure notée z_0 .
2. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$.
3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .
a. Détermine l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ puis écris z_G sous la forme exponentielle.

b. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4.$$

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$?

Bac SE 2020 (Mali)

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe z différent de z_B , on pose $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

1. Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a. Z soit un réel ;

b. Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;

c. Z soit de module 1.

2. Calcule $|Z - 1| \times |z - z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R , les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Bac SE 2019 (Mali)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C) , associe $f(M) = MA \times MB$.

a) Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.

b. Montre l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.

c. En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right)^2}$

3) a) En utilisant 2)c), montre qu'il existe deux points M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.

b) En utilisant 2)c), montre qu'il existe un seul point M de (C) , dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Bac SE 2018 (Mali)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

Partie A

1) Montre que $-i$ est solution de (E) .

2) Détermine les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

3) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$; $4 - i$; $-i$.

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.
Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r .
Calcule l'affixe s de S .
3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
 - a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .
 - b. Vérifie que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P , d'affixe i . Détermine son rayon et trace $\mathcal{C}'$.
 - c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
 - d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
 - e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

Bac SE 2017 (Mali)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes : $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

- 1) Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de Z_0 et n .
- 2) Donne Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 3) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4cm).
- 4) Détermine la distance OM_n en fonction de n .
- 5) a) Montre que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$).
Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
- 6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .
- 7) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

Bac SE 2016 (Mali)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

- 1°) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
- 2°) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de E . Construis E .
- 3°) Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.
- 4°) On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F .
 - a) Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par S .
 - b) Détermine le centre Ω , l'angle θ et le rapport k de la similitude S .
 - c) Détermine les images de C et D par S .
 - d) Calcule l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$.

Bac SE 2015 (Mali)

- I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $a = -1 + 3i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.
1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f .
 2. Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f . Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
 3. Soit $M(x; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f . Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
 4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5; 5]$.

Bac STI 2015 (Mali)

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

- 1) Calcule z^2 et z^4 .
- 2) Calcule le module et un argument de z^4 . En déduis le module et un argument de z .
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit $M(x; y)$ un point du plan d'affixe le complexe $a = x + iy$. Détermine l'ensemble des points M du plan tels que le module de az soit égal à 8 où z est le complexe défini précédemment.

Bac SE 2014 (Mali/Bamako)

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i, z$ et z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

1. Exprimez les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
2. Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :
 - a) z' soit réel.
 - b) z' soit imaginaire pur.
3. On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calculez $|ZZ'|$.
4.
 - a) Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.
 - b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Bac SE 2014 (Mali/Région)

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1 - z)$.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$ résous l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.
- 2) On se propose de résoudre le système suivant : (1): $\begin{cases} h_n(z) = h_0(z) \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$
 - a) Montre que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions.

- b) Soit z_0 l'une de ces solutions, calcule, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$.
- c) En déduis que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. Quel est l'ensemble des solutions du système ?

Bac STI 2014 (Mali)

- 1) Soit l'équation (E): $z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.
- a) Montre que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\bar{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
- b) Calcule le module et un argument de u . En déduis le module et un argument de $\bar{u}$.
- c) Ecris $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- d) Calcule le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$.
- En déduis le module et un argument de $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$

- a) Construis le triangle ABC .
- b) Calcule les distances AB et BC .
- c) Ecris le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.
- d) Déduis des questions a) et b) la nature du triangle ABC .

Bac SE 2013 (Mali) (pas de nombres complexes)

Bac SE 2012 (Mali)

On considère le complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

- 1) On note $Z = X + iY$, $(X; Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecris X et Y en fonction de x et y .
- 2) Au complexe z on associe le plan $M(x; y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.
- 3) Résous dans l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montre que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

BAC SE 2011 (Mali) (pas de nombres complexes)

Bac SE 2010 (Mali)

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

- 1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (1pt)
- 2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (1pt)
- 3°/ Achever la résolution dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation (E). (1pt)
- 4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont

dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
(1pt)

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) (1pt)

BAC SE 2009 (Mali)

z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

a.) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).

b.) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

BAC SE 2008 (Mali)

On considère le nombre complexe u définis par $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ($i^2 = -1$).

1. a) Calcule u^2 et u^4 .

b) Calcule le module et un argument de u^4 , déduis-en le module et un argument u .

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan, on associe son affixe $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Détermine l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times Z$ égal à 8.

BAC SE 2007 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2006 (Mali)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(F): z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2 + \sqrt{3}) + 8 = 0.$$

g. Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$ (c'est-à-dire que $\bar{z}_0$ est aussi solution de (F)).

h. Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.

i. Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).

j. Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm).

k. Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

BAC SE 2005 (Mali)

1. Déterminer sous forme algébrique les racines sixième de l'unité, c'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.

2. Calculer $(1 - i)^6$.

En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$.

BAC SE 2004 (Mali)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{5}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

1. Détermine l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $1 + i$. Vérifie que les points O , A et A' sont alignés.
2. Montre que pour tout point M distinct de O , les points O , M et M' sont alignés.
3. Trouve l'ensemble (Γ) des points invariants par f .
4. a) Soit $z \neq 0$, montre que si $|z - (1 + i)| = \sqrt{2}$ alors $\left| \frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{5}{z} \right|$.
b) Dédus en que si M est un autre point autre que O du cercle (C) de centre A passant par O , alors son image M' par f appartient à une autre droite (D) que l'on déterminera.
c) Montre que tout points de (D) est l'image par f d'un point de $(C) - \{O\}$ par f .
d) Tracer (Γ) , (D) et (C) dans le même repère.
e) Dédus en l'image $(C) - \{O\}$ par f .

BAC SE 2003 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2002 (Mali)

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = -2(\cos x + i \sin x); z_2 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}}; z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2\cos 3x - 2i \sin 3x}$$

BAC SE 2001 (Mali) (pas de nombres complexes)

BAC SE 2000 (Mali)

1. a. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer le terme général r_n en fonction de n et de r_0 .
b. Soit (θ_n) la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 ; $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer le terme général en fonction de n et θ_0 .
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. Sachant que $z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0 , z_1 , z_2 .
2. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = r_n e^{i\theta_n}$.
a) Placer dans (P) les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 .
b) $\forall n \in \mathbb{N}$, calculer $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ en fonction de n .
c) On pose $I_n = \sum_{k=0}^n \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$. Calculer I_n en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. a) Ecrire sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe

$$z = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}; \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

b) Déterminer le module et un argument du Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par : $z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

a) Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

b) Calculer z_1 , z_2 , z_3 et vérifier que z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 .

c) Calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$. En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que : $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3} |z_{n+1}|$.

ADD

Sujets de mes devoirs

Devoir N°1

Lycée La Bruyère (LBRUY)

Devoir n°1 de Mathématiques			
Classe : TSE	05 novembre 2022	Durée : 3 heures	Coef : 05

Lis attentivement

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5,5 points]

A. Détermine le module et un argument de : (1, 5 pts)

$$z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right); \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} + i \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

B. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel positif. (0, 75 pt)

C. Linéarise : $\cos^3(2x) \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)$. (1 pt)

D. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\bar{z} + 1 - 2i = 0$ (1 pt)

E. Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z .

$$(E): z^2 - (2^{\alpha+1} \cos \alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$$

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (0, 75 pt)

2. Donne la forme trigonométrique de chaque solution. (0, 5 pt)

Exercice 2 : -----[5,5 points]

A. Soit u et v les nombres complexes définis par : $u = \sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $v = u^4$.

3. a. Ecris v sous forme algébrique. (0, 5 pt)

b. Détermine les racines quatrièmes de v sous forme trigonométrique. (1 pt)

4. En utilisant les racines quatrièmes de l'unité détermine les racines quatrièmes de v sous forme algébrique. (1, 5 pts)

5. Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. (0, 5 pt)

6. Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe $Z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$:
Détermine l'ensemble des points (E) du plan tel que $|u \times Z| = 8$. (0, 5 pt)

B. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.

Place les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. (1, 5 pts)

Problème : -----[9 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le polynôme

$$f(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 74z + 100$$

1- Soit z_0 un nombre complexe. Montre que $f(\overline{z_0}) = \overline{f(z_0)}$. (0,75 pt)

2- En déduis que $f(z_0) = 0$ alors $f(\overline{z_0}) = 0$ (0,5 pt)

3- Calcule $f(3+4i)$. Que conclure ? (0,5 pt)

4- En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$ (1 pt)

4- Soit A, B, C et D les points images respectives des solutions $z_A; z_B; z_C$ et z_D de l'équation

$f(z) = 0$ tel que $\text{Re}(z_A) > 2$ et $\text{Im}(z_A) > 2$; $\text{Re}(z_B) > 2$ et $\text{Im}(z_B) < 0$; $\text{Re}(z_C) < 2$ et $\text{Im}(z_C) > 0$ et z_D la quatrième solution.

a) Place ces points dans le plan complexe. (1 pt)

b) Soit I le point d'affixe $z_I = 3 + i\sqrt{3}$. Calcule $\frac{z_A - z_I}{z_C - z_I}$. En déduis la nature du triangle ACI. (1 pt)

c) Détermine la nature, le périmètre et l'aire du quadrilatère ACDB. (1 pt)

d) Montre que les points A, B, C et D sont sur le même cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon. (1 pt)

6- On pose $Z = \frac{z+2-3i}{z-z_A}$

Détermine et construis les ensembles (E) des points $M(z)$ vérifiant :

a) $|Z| = 1$, (0,75 pt)

b) $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0,75 pt)

c) $\arg(Z) = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0,75 pt)

Devoir N°2

Lycée Public de Niamakoro (LNIAMA)

Devoir n°1 de Mathématiques

Classe : TSE

05 novembre 2022

Durée : 3 heures

Coef : 05

Lis attentivement

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5,5 points]

1°) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (0,25 pt)

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. (0,75 pt)

c) Déduis des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

(E) : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$. (0, 75 pt)

2°) a) Ecris $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. (0, 25 pt)

b) Déduis-en les arguments des solutions de (E). (0, 25 pt)

3°) Déduis des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (0, 25 pt)

II/Détermine et construis l'ensemble (E) des points $M(z)$ vérifiant : (2 pts)

1) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$

2) $|(1+i)z - 2i| = 2$

3) $|z - 2 + i| \leq 2$

4) $|z - 3 + i| = 2|z + 1 + 5i|$

III/ Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0$. (1 pt)

Exercice 2 : -----[4,5 points]

θ est un réel quelconque, on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$E(\theta) : Z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)Z + 5 + 4 \cos \theta = 0$.

1-Résous dans $\mathbb{C}$, les équations $E(\frac{\pi}{2})$ et $E(\frac{\pi}{6})$ en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$. (1 pt)

2-Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_C = \bar{Z}_B$, $Z_D = \bar{Z}_A$.

a) Détermine les formes algébriques des affixes des points puis place les points dans le repère. (1 pt)

b) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD. (1 pt)

c) En déduis que ces points appartiennent à un cercle γ dont on donnera une équation.

(0, 5 pt)

3-Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(\theta)$. (0, 75 pt)

a) Démonstre que les points qui ont pour affixes les solutions de $E(\theta)$ sont les points de γ .

(0, 25 pt)

Problème : -----[10 points]

On considère le polynôme $c = Z^3 - 3\sqrt{2}(1+i)Z^2 + 4(1+3i)Z - 8i\sqrt{2}$

1-a) Calcule $P(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ (0, 75 pt)

b) Détermine les complexes a et b tels que $P(Z) = (Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(Z^2 + aZ + b)$ (1 pt)

2-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$ (1 pt)

3-Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$Z_0 = \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$, $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $Z_2 = \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 2)$,

a) Détermine le module et un argument de Z_0, Z_1 et Z_2 . (1, 5 pts)

b) Montre que les points A, B et C sont alignés et que B est le milieu du segment [AC].

(0, 75 pt)

3-a) Détermine l'équation de la droite (D) médiatrice du segment [AC]. (0, 5 pt)

b) Soit M l'ensemble des points de la droite (D) d'affixe Z . Trouve l'expression de Z .

(0, 5 pt)

c) Calcule le rapport $\frac{z_0 - z}{z_2 - z}$. Déduis-en la nature du triangle MAC . (0, 75 pt)

d) Détermine l'expression de Z pour laquelle MAC est un triangle équilatéral. (0, 5 pt)

B/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- Trouve l'ensemble de points M d'affixe z tel que les points images des nombres complexes :

$1; z; 1 + z^2$, soit alignés. (0, 5 pt)

2- On désigne par le point M d'affixe z et M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{z+1}{z-1}$

a- Trouve l'ensemble (D) des points M d'affixe z pour que Z soit réel. (0, 75 pt)

b- Trouve l'ensemble (H) des points M d'affixe z pour que Z soit imaginaire pur. (0, 75 pt)

c- Trouve l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $O; M; M'$ soient alignés. (0, 75 pt)

Devoir N°3

Lycée Scientifique de Bamako (LSBA)

Devoir n°1 de Mathématiques

Classe : TSE	23 novembre 2021	Durée : 3 heures	Coef : 05
--------------	------------------	------------------	-----------

Lis attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5 points]

F. Soit α et α' deux nombres complexes de module 1. Démontre que :

d. $u = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha}$ est réel. (0, 75 pt)

e. $v = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\alpha'}$ est réel pour $\alpha\alpha' \neq -1$. (0, 75 pt)

G. Détermine le module et un argument de $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$ (0, 75 pt)

H. Détermine les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif. (0, 75 pt)

I. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\arg\left(\frac{z^2 - 9}{2i}\right) \equiv \arg(z + 3)[\pi] \quad (1 \text{ pt})$$

J. Soit $z' = \frac{\bar{z}+i}{z-2+3i}$; $z \neq 2 - 3i$. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que z' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1. (1 pt)

Exercice 2 :-----[6 points]

- C. Soit u et v les nombres complexes définis par : $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $v = u^4$.
7. En utilisant les racines quatrièmes de l'unité détermine les racines quatrièmes de v sous forme algébrique. (2 pts)
8. a. Ecris v sous forme algébrique. (0, 25 pt)
b. Détermine les racines quatrièmes de v sous forme trigonométrique. (1 pt)
9. Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe $Z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$: Détermine l'ensemble des points (E) du plan tel que $|u \times Z| = 8$. (0, 75 pt)
- D. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$.
Place les points images de ses solutions dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. (2 pts)

Problème : -----[9 points]

- A. On considère le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$.
Soit $P(z) = z^3 + 2(1 - 2 \cos 2\alpha)z^2 + 4(1 - 2 \cos 2\alpha)z + 8$ avec $\alpha \in]-\pi; \pi[$
1. Calculer $P(-2)$
 2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$
 3. Pour $a = 1$; $b = -4 \cos 2\alpha$ et $c = 4$, résoudre $P(z) = 0$.
 4. Calcule le module et un argument des solutions de $P(z) = 0$.
 5. Soient A , B et C les points images dans le plan complexe des solutions de $P(z) = 0$. Pour quelle valeur de α le triangle ABC est-il équilatéral ?
- B. Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et -2 . On appelle (τ) le cercle de diamètre $[AB]$ et I le milieu $[AB]$.
5. Soit C le point d'affixe $c = \frac{1+4i}{1-2i}$. Détermine la forme algébrique de c et prouve que le point C appartient à (τ) .
 6. Soit D le point de (τ) tel que $(\vec{IA}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par d l'affixe de D .
 - d. Détermine le module et un argument de $d + \frac{1}{2}$.
 - e. Dédus-en d .
 - f. Détermine le réel x telque $\frac{1+2xi}{1-xi} = \frac{1}{4} + i \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
 7. Soit E un point d'affixe $e = \frac{1+2yi}{1-yi}$ où y est un réel non nul. On pose $Z = \frac{e-1}{e+2}$. Calcule Z et déduis en la nature du triangle ABE .
 8. Soit F un point de (τ) autre que B et f son affixe. Démontre qu'il existe un réel t tel que
$$f = \frac{1 + 2ti}{1 - ti}.$$



Epreuve de Mathématiques :

Série : TSE

Durée : 3 heures



Auteur : M. Tangara

Exercice : 1 (5 pts)

Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1- $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec n un entier naturel non nul (1pt)

2- $(z-1)^5 = (z+1)^5$ (1pt)

3- $(4-3i)z - 2i\bar{z} = 11 + 23i$ (1pt)

4- $5|z| + 13z = -28 + 104i$ (1pt)

5- $z^2 - (8\cos\theta)z + 16 - 7\sin^2\theta = 0$; $\theta \in [0; 2\pi]$ (1pt)

Exercice 2 : (3 pts)

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe

(E) : $z^3 - (1+2\cos\alpha)z^2 + (1+2\cos\alpha)z - 1 = 0$

1- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant 1 est une solution évidente. (1 pt)

2- On désigne par z_1 et z_2 les autres solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_2) < 0$ et

$Z = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \times \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$. Détermine les racines quatrième de Z sous forme trigonométrique

puis sous forme algébrique et représente leur point image sur le cercle trigonométrique (1,5 pts)

3- Précise le module et l'argument de z_1 et z_2 (0,5 pt)

Problème : (12 pts) les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $-2+i$, i ,

z et z' avec $z' = \frac{iz}{z+2-i}$

1- Exprime les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M. (1,5 pts)

2- Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel. (0,5 pt) b) z' soit imaginaire pur. (0,5 pt)

c) $\arg(z') = \pi + k\pi$ avec k un entier relatif (0,5 pt) d) $|z'| = 1$ (0,5 pt) e) $|z'| = \frac{5}{3}$ (0,5 pt)

3- Montre que $|z' - i| = \frac{\sqrt{5}}{|z+2-i|}$ (1,5 pts)

4- Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre A et de rayon 2. (1pt)

Partie B :

1-Ecris sous forme algébrique $z = 11 + i - \frac{12}{(5-i)(2i-3)}$. (0,5 pt)

2-Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans chacun des cas suivants :

a) $S = \frac{(1+i)^8}{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}$; b) $T = -3i(1+e^{\frac{7}{4}ix})$; $x \in \mathbb{R}$ c) $L = \frac{1+e^{i7x}}{1-e^{i7x}}$; $x \in \mathbb{R}$ (1,5 pts)

3-a) Détermine les racines sixièmes de l'unité sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique (1pt)

b) calcule $(1+i)^6$ (0,5 pt)

c) En déduis les racines sixièmes du complexe $t = -8i$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique (1 pt)

4-Soit u et v deux nombres complexes. Montre que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ (1 pt)