

Séquence 5 : Fonction exponentielle népérienne

Pré évaluation :

1. Pour tout réel a , simplifie les réels suivants :

a°) $A = a^3 \times a^4$; b°) $B = \frac{a^3}{a^4}$; $a \neq 0$ c°) $C = (a^3)^4$ $a \neq 0$

2. Si f est une fonction bijective sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque alors donne la formule explicite de $f \circ f^{-1}$.

Situation Problème :

- 1) Dans le chapitre précédent tu as appris que la fonction logarithme népérien est une fonction bijective sur $]0; +\infty[$. Détermine alors sa réciproque.
- 2) Détermine une fonction (ou la fonction) f telle que $f' = f$.

Déroulement des activités

Activité 1 : Fonction exponentielle népérienne

a. Définition

La fonction logarithme népérien étant une fonction bijective sur $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$, elle admet une réciproque appelé exponentielle et notée **exp** ou $(x \mapsto e^x)$.

$\exp(x) = e^x$ se lit « exponentielle de x »

$$\ln x = y$$

$$x \in]0; +\infty[$$

$\Leftrightarrow$

$$e^y = x$$

$$y \in]-\infty; +\infty[$$

b. Conséquences immédiates

- ☞ Pour $x \in]0; +\infty[$; $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x > 0$. Donc e^x est strictement positif pour tout réel x ;
- ☞ $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$
- ☞ Pour $x \in]-\infty; +\infty[$; $\ln e^x = x \ln e = x \times 1 = x$
- ☞ Pour $x \in]0; +\infty[$; $e^{\ln x} = e^y = x$
- ☞ La fonction logarithme étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$ alors la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$.

Il en résulte que ; pour tout réel a et b :

✓ $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

✓ $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

✓ $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

c. Propriétés

- ☞ **Propriété fondamentale** : pour tout réels a et b ; $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- ☞ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
- ☞ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;
- ☞ $(e^x)^n = e^{nx}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Une Preuve de la propriété fondamentale

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\ln(e^{a+b}) = a + b = \ln(e^a) + \ln(e^b) = \ln(e^a \times e^b) \Rightarrow e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Etude de la fonction exponentielle

$$\exp:]-\infty ; +\infty[\rightarrow]0 ; +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x) = e^x$$

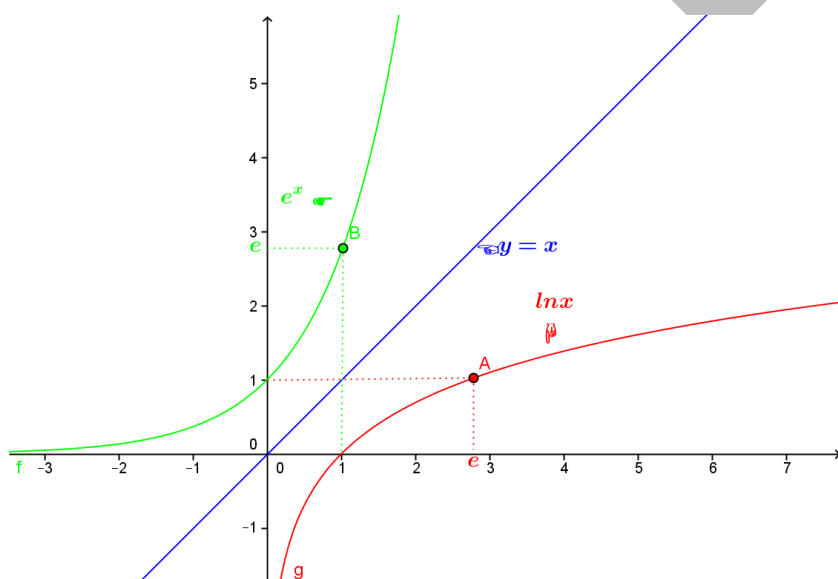
d. Tableau de variation

La fonction exponentielle étant la réciproque de la fonction logarithme, on déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$

e. La courbe représentative de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant la bijection réciproque de la fonction logarithme, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).



f. Limite de la fonction exponentielle :

Du tableau de variation on déduit les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Les limites usuelles

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $n \in \mathbb{Q}_+$

g. Dérivée de la fonction exponentielle

Pour tout réel x on a : $\ln e^x = x$.

Donc $(\ln e^x)' = x' \Leftrightarrow \frac{(e^x)'}{e^x} = 1 \Leftrightarrow (e^x)' = e^x$.

Pour tout réel x ; $(e^x)' = e^x$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi on peut donner une autre définition de la fonction exponentielle

Définition 2 : On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Activité :

Soit la fonction $f(x) = e^{x^3-5x}$

Donne la dérivée de la fonction $g(x) = \ln(e^{x^3-5x}) = x^3 - 5x$

Déduis en la dérivée de la fonction f .

Solution :

La fonction $g'(x) = [\ln(e^{x^3-5x})]' = (x^3 - 5x)'$ d'où $g'(x) = \frac{(e^{x^3-5x})'}{e^{x^3-5x}} = 3x^2 - 5$.

On sait que la fonction $f'(x) = (e^{x^3-5x})'$; donc dans $g'(x)$ on tire $(e^{x^3-5x})'$.

On en déduit $f'(x) = (3x^2 - 5)e^{x^3-5x}$

Synthèse :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction e^u est dérivable sur K et on a : $(e^u)' = u'e^u$.

h. Primitives

Activité :

Soit la fonction définie par $F(x) = e^{-x^2+10x}$

Montrer que F est une primitive de la $f(x) = (-2x + 10)e^{-x^2+10x}$

Synthèse :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K .

La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur K : la fonction e^u .

Activité 2 : Fonction exponentielle de base a ($x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$)

2.1. Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

- On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f_a: x \mapsto a^x$
- Pour tout nombre réel x , on a : $a^x = e^{x \ln a}$
- Si $a = e$ alors $f_a(x) = e^x$

2.2. Propriétés

Propriété1

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y , on a :

- ☞ $a^{x+y} = a^x \times a^y$;
- ☞ $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$;
- ☞ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
- ☞ $(ab)^x = a^x \times b^x$;
- ☞ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, 6) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Propriété2

Soit $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ donc :

$f'_a(x) = \ln a e^{x \ln a}$ et $F_a(x) = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + c$; avec F_a la primitive de f_a et c un réel.

2.3. Tableaux de variation

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de f_a suivant les valeurs de a .

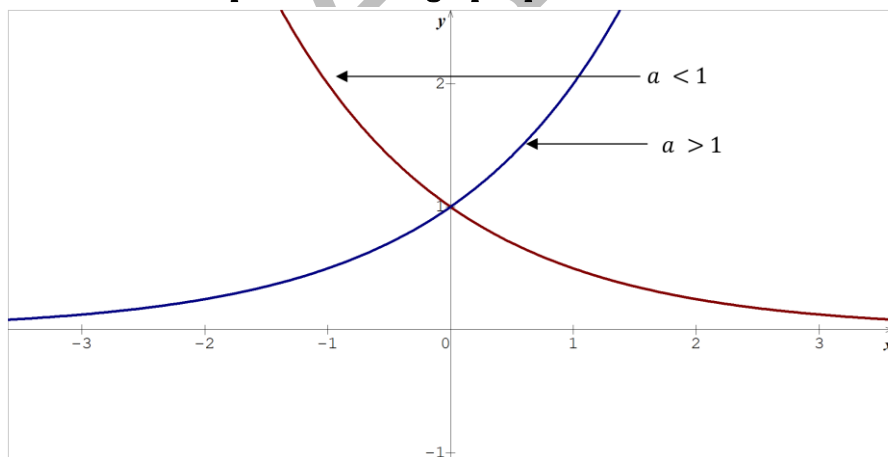
1^{er} cas : Si $0 < a < 1$ alors on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	
$f_a(x)$	$+\infty$	0

2^{ème} cas : Si $a > 1$ alors on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$	+	
$f_a(x)$	0	$+\infty$

2.4. Représentations graphiques



2.5. Croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto x^\alpha$; $x \mapsto e^x$

Les propriétés suivantes sont admises : pour $\alpha > 0$ on a :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0; \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

Evaluation

Exercice 1

A. Simplifie l'expression $A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}}$.

B. Résous dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x+1} = e^7$; b) $3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$; c) $2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$; d) $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$;
e) $4^{-x} = 3$; f) $3^x > 6$; g) $2^{-x} \geq 3$; h) $3^{-x} \leq 3^{2x}$; i) $e^{x^2+1} \leq e^{x+7}$.

Exercice 2

Calcule les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3-x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3-x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 4}{e^{x+3}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 4}{e^{x+3}}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{1-x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{-3x+7}$; 2) $f(x) = e^{\frac{3}{4}x^2+x-1}$; 3) $f(x) = (-3x+1)e^{-x+3}$; 4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Exercice 4

Détermine les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x) = (3x^2 - 2)e^{x^3-2x+3}$;

2) $P(x) = x e^{x^2+1}$; 3) $f(x) = e^{-5x+3}$; 4) $f(x) = \frac{e^{x+2}}{1-3e^x}$; 5) $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+3)^2}$; 6) $q(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$; On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ unité graphique 2 Cm.

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1) Étudie les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Calcule la dérivée de g et détermine son signe.

3) Déduis - en le tableau de variation de g .

4) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

5) Déduis - en le signe de g .

II.1) Étudie les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Détermine $f'(x)$ pour tout réel x .

3) Déduis - en, à l'aide de I) les variations de f et donne son tableau de variation.

4) Prouve que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

5) Montre que $(D) : y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Précise la position de (C) par rapport à (D) .

6) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.

7) Trace (C) ; (D) et (T) .

III. 1. Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie par: $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$.

2. Calcule en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 de la partie limitée par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.

3. Calcule la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

Exercice 6

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-2x - 4)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Pour tout réel x , on considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$$

- 1) Etudie les variations de la fonction g .
- 2) Déduis – en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

- 1) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$ puis interprète.
- 3) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$.
- 4) Déduis – en le sens de variation de f .
- 5) Détermine les coordonnées du point B intersection de la courbe (C_f) de f et de son asymptote oblique (D) . Déduis – en la position de (C_f) et (D) .
- 6) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifie que $-2 < \ell < -1$.
- 7) Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
- 8) Trace (D) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 9) Calcule l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (D) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.