

Chapitre 9

Équations différentielles

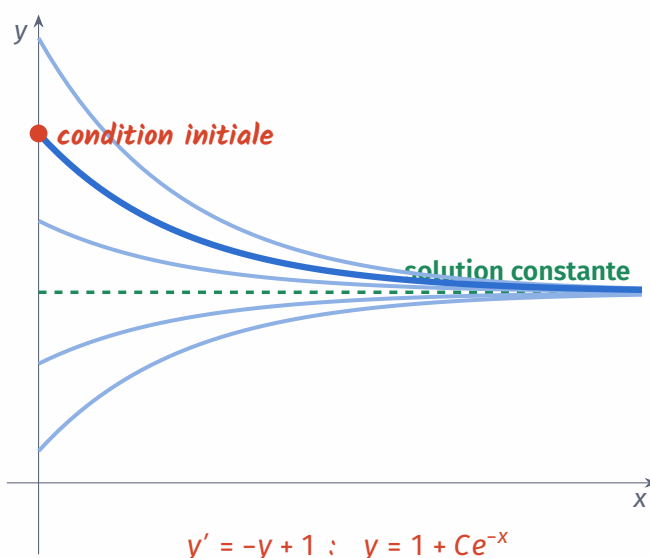
Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$y' = ay + b \Rightarrow y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$
$$y'' + ay' + by = 0 : r^2 + ar + b = 0$$

Défi de concours

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 2 : y = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1	Notion d'équation différentielle	6
1.1	Vocabulaire	6
1.2	Vérifier qu'une fonction est solution	6
1.3	Des équations qui modélisent le réel	7
2	L'équation $y' = ay$	7
3	L'équation $y' = ay + b$	8
3.1	La solution constante	8
3.2	Toutes les solutions	8
3.3	Allure des solutions	9
4	Équations avec second membre	10
5	L'équation $y'' + ay' + by = 0$	11
5.1	L'équation caractéristique	11
5.2	Le théorème des trois cas	12
6	Les trois cas en pratique	13
6.1	Allure des solutions : les trois régimes	14
7	Conditions initiales	14
7.1	Deux conditions pour deux constantes	14
7.2	Avec un second membre	15
8	L'oscillateur harmonique	16
9	Applications en physique et chimie	17
9.1	Circuits RC et RL	18
9.2	Décroissance radioactive et demi-vie	18
9.3	Refroidissement : la loi de Newton	19
9.4	Chute verticale avec frottement	19
9.5	Oscillations libres : ressort et circuit LC	20
10	Les pièges classiques	20
11	Les astuces des concours	21
12	L'essentiel du chapitre en une page	24
13	Niveau 1 · Bases	25

14 Niveau 2 · Bac	26
15 Niveau 3 · Approfondissement	28
16 Niveau 4 · Concours	29
17 L'équation $y' = ay + b$	31
18 Équations avec second membre	33
19 Équations du second ordre	35
20 Oscillations ($\Delta < 0$)	37
21 Modélisation (physique, chimie)	39
22 Défis de concours	41
23 Corrigés du niveau 1	44
24 Corrigés du niveau 2	46
25 Corrigés du niveau 3	50
26 Corrigés du niveau 4	52
27 Corrigés : l'équation $y' = ay + b$	55
28 Corrigés : équations avec second membre	58
29 Corrigés : équations du second ordre	62
30 Corrigés : oscillations ($\Delta < 0$)	65
31 Corrigés : modélisation	69
32 Corrigés : défis de concours	72

Comment utiliser ce livret**Les 4 niveaux d'exercices****Niveau 1 · Bases ★**

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (écoles d'ingénieurs, médecine, classes préparatoires).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

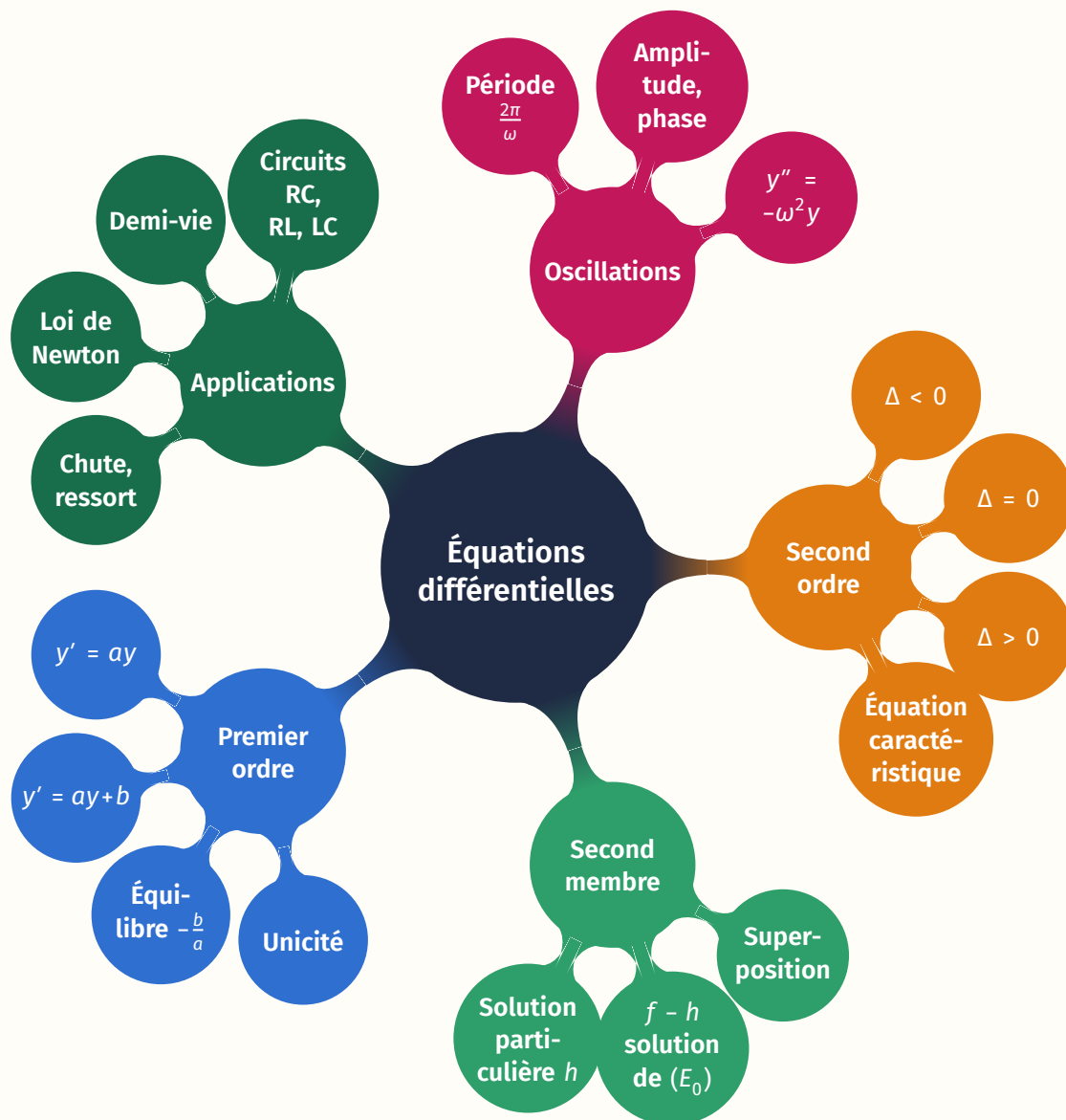
Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (L'équation $y' = ay + b$, Équations avec second membre, Équations du second ordre, Oscillations ($\Delta < 0$), Modélisation (physique, chimie), Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|---|
| ☐ vérifier qu'une fonction est solution ; | ☐ trouver C_1 et C_2 avec $f(x_0)$ et $f'(x_0)$; |
| ☐ résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$; | ☐ utiliser la forme $R \cos(\omega x + \varphi)$; |
| ☐ trouver la solution telle que $y(x_0) = y_0$; | ☐ donner l'amplitude et la période d'une oscillation ; |
| ☐ lire l'équilibre $-\frac{b}{a}$ et l'allure des solutions ; | ☐ modéliser un circuit RC, RL ou LC ; |
| ☐ chercher une solution particulière ; | ☐ calculer une demi-vie ou un temps caractéristique ; |
| ☐ utiliser « $f - h$ solution de (E_0) » ; | ☐ retrouver l'équation dont on connaît les solutions. |
| ☐ écrire l'équation caractéristique ; | |
| ☐ résoudre $y'' + ay' + by = 0$ dans les trois cas ; | |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Notion d'équation différentielle

1.1 Vocabulaire

Définition : équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** y de la variable réelle x , et qui relie y , ses dérivées y' , y'' , ... et éventuellement x .

- Son **ordre** est celui de la dérivée la plus élevée qui y figure : $y' = 2y$ est d'ordre 1 ; $y'' + y = 0$ est d'ordre 2.
- Une **solution** sur un intervalle I est une fonction f , dérivable sur I (deux fois pour l'ordre 2), qui vérifie l'équation **pour tout** $x \in I$.
- **Résoudre** l'équation, c'est déterminer **toutes** ses solutions. Dans ce chapitre, $I = \mathbb{R}$ sauf mention contraire.

Écrire « $y' = 2y$ » est un raccourci : une fonction f est solution lorsque $f'(x) = 2f(x)$ **pour tout** réel x . La courbe représentative d'une solution s'appelle une **courbe solution**.

1.2 Vérifier qu'une fonction est solution

Méthode : vérifier que f est solution de (E)

1. Calculer $f'(x)$ (et $f''(x)$ si l'équation est d'ordre 2).
2. Remplacer y , y' , y'' par $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ dans le membre de gauche, puis simplifier.
3. Conclure si l'on obtient le membre de droite **pour tout** x de l'intervalle.

Exemple

- $(E_1) : y' = 2y$ et $f(x) = 3e^{2x} : f'(x) = 6e^{2x} = 2 \times 3e^{2x} = 2f(x)$ pour tout réel $x : f$ est solution. De même, $x \mapsto Ce^{2x}$ est solution pour tout réel C : l'équation a **une infinité** de solutions.
- $(E_2) : y' + y = x$ et $f(x) = x - 1 : f'(x) + f(x) = 1 + (x - 1) = x : f$ est solution. En revanche, $g(x) = x$ ne l'est pas : $g'(x) + g(x) = 1 + x \neq x$.
- $(E_3) : y'' + y = 0$ et $f(x) = \sin x - 2 \cos x : f'(x) = \cos x + 2 \sin x$ et $f''(x) = -\sin x + 2 \cos x = -f(x)$, donc $f''(x) + f(x) = 0 : f$ est solution.

- $(E_4) : y'' - 3y' + 2y = 0$ et $f(x) = e^{2x} : f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 4e^{2x}$, donc $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (4 - 6 + 2)e^{2x} = 0 : f$ est solution.

Attention, piège !

L'égalité doit être vraie pour **tout** x , pas pour quelques valeurs. Pour $f(x) = x^2$ et $(E_1) : y' = 2y$, on a $f'(x) = 2x$ et $2f(x) = 2x^2$: ces nombres sont égaux en $x = 0$ et en $x = 1$, mais pas en $x = 2$ ($4 \neq 8$). Donc f **n'est pas** solution de (E_1) .

■ 1.3 Des équations qui modélisent le réel

Une loi de la physique, de la chimie ou de la biologie donne souvent la **vitesse de variation** d'une grandeur en fonction de sa valeur : c'est une équation différentielle. Connaissant l'état de départ (la **condition initiale**), on peut alors prévoir toute l'évolution (section 9).

Phénomène	Fonction inconnue	Équation différentielle
Désintégration radioactive	nombre de noyaux $N(t)$	$N' = -\lambda N \ (\lambda > 0)$
Croissance d'une population	effectif $P(t)$	$P' = kP \ (k > 0)$
Refroidissement (loi de Newton)	température $\theta(t)$	$\theta' = -k(\theta - \theta_a) \ (k > 0)$
Charge d'un condensateur (RC)	tension $u_C(t)$	$RC u'_C + u_C = E$
Chute verticale avec frottement	vitesse $v(t)$	$m v' = mg - kv$
Ressort ; circuit LC	position $x(t)$; tension $u_C(t)$	$x'' + \frac{k}{m} x = 0 ; LC u''_C + u_C = 0$

Remarque. En physique, la variable est le temps t et l'on note aussi $\frac{dN}{dt}$ pour $N'(t)$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ pour $x''(t)$. Tout le cours s'applique en remplaçant la variable x par t .

2 L'équation $y' = ay$

Théorème

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \mapsto C e^{ax}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

Démonstration.

- Pour tout réel C , la fonction $f(x) = C e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = a C e^{ax} = a f(x)$: c'est une solution.
- Réciproquement, soit f une solution. On pose $g(x) = f(x) e^{-ax}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = f'(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} = (f'(x) - a f(x)) e^{-ax} = 0.$$

Donc g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$: il existe un réel C tel que $f(x) e^{-ax} = C$, soit $f(x) = C e^{ax}$.

□

Solution vérifiant une condition initiale

Soient x_0 et y_0 deux réels. L'équation $y' = ay$ admet une **unique** solution f telle que $f(x_0) = y_0$:

$$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Démonstration. $f(x) = Ce^{ax}$ et $f(x_0) = y_0 \iff Ce^{ax_0} = y_0 \iff C = y_0 e^{-ax_0}$: une seule valeur de C convient, et alors $f(x) = y_0 e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$. $\square$

Exemple

- $y' = 3y$: les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- $2y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{2}y$: les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{x}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.
- $y' = -2y$ avec $y(1) = e$: $f(x) = Ce^{-2x}$ et $f(1) = Ce^{-2} = e \iff C = e^3$. Donc $f(x) = e^3 e^{-2x} = e^{3-2x}$.
- $y' - \sqrt{2}y = 0$ avec $y(0) = -5$: $y' = \sqrt{2}y$, donc $f(x) = -5e^{\sqrt{2}x}$.

Remarque. Pour $C \neq 0$, la solution $x \mapsto Ce^{ax}$ ne s'annule jamais et garde le signe de C . Si $a < 0$, elle tend vers 0 en $+\infty$; si $a > 0$, elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Pour $a = 0$, on retrouve $y' = 0$: les solutions sont les constantes. Enfin, $f(x+1) = e^a f(x)$: les valeurs $f(0), f(1), f(2), \dots$ forment une **suite géométrique** de raison e^a .

3 L'équation $y' = ay + b$

Dans toute cette section, a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$.

■ 3.1 La solution constante

Une fonction constante $x \mapsto k$ a une dérivée nulle : elle est solution si et seulement si $0 = ak + b$, c'est-à-dire $k = -\frac{b}{a}$.

Propriété

La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est l'**unique solution constante** de $y' = ay + b$: c'est l'**état d'équilibre**.

■ 3.2 Toutes les solutions

Théorème

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour tous réels x_0 et y_0 , il existe une **unique** solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; posons $z = f + \frac{b}{a}$. Alors $z' = f'$ et $az = af + b$, donc

$$f' = af + b \iff z' = az \iff z(x) = Ce^{ax} \quad (C \in \mathbb{R}) \iff f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Condition initiale : $f(x_0) = y_0 \iff Ce^{ax_0} = y_0 + \frac{b}{a} \iff C = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{-ax_0}$: une seule valeur de C . $\square$

À retenir : solutions de $y' = ay + b$ = solutions de $y' = ay$ + la solution constante $-\frac{b}{a}$.

Méthode : résoudre $y' = ay + b$ avec une condition initiale

1. Mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et lire a et b (attention aux signes et au coefficient devant y').
2. Écrire la solution générale : $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
3. Traduire la condition initiale $y(x_0) = y_0$ pour trouver C , puis contrôler le résultat.

Exemple : $2y' + y = 2$ avec $y(0) = 0$

On divise par 2 : $y' = -\frac{1}{2}y + 1$, donc $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$.

Solutions : $y = Ce^{-\frac{x}{2}} + 2$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $y(0) = C + 2 = 0 \iff C = -2$.

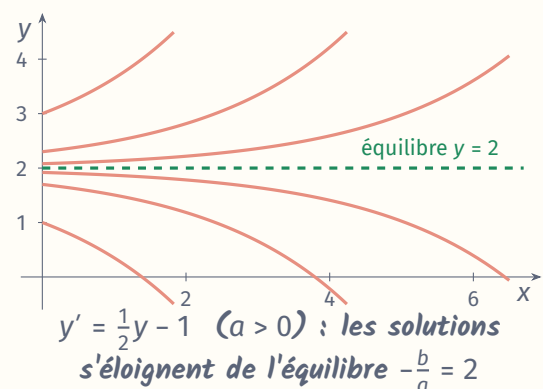
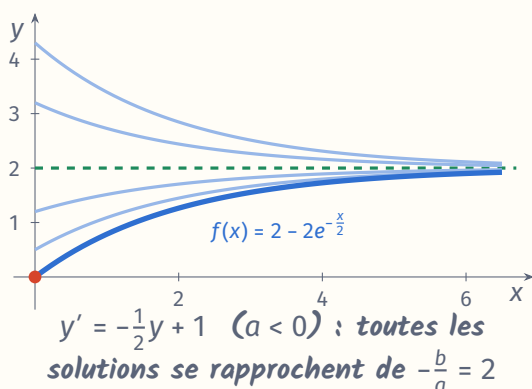
La solution cherchée est $f(x) = 2 - 2e^{-\frac{x}{2}}$. Contrôle : $f(0) = 2 - 2 = 0$ et $2f'(x) + f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}} + 2 - 2e^{-\frac{x}{2}} = 2$. $\checkmark$

Exemple : $y' = 3y - 6$ avec $y(1) = 1$

Ici $a = 3$, $b = -6$ et $-\frac{b}{a} = 2$: $y = Ce^{3x} + 2$. Puis $y(1) = Ce^3 + 2 = 1 \iff C = -e^{-3}$, donc

$$f(x) = 2 - e^{3x-3}.$$

3.3 Allure des solutions



- Si $a < 0$: $e^{ax} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc **toutes** les solutions tendent vers $-\frac{b}{a}$: l'équilibre est **stable** (charge d'un condensateur, refroidissement, vitesse limite...).
- Si $a > 0$: seule la solution constante reste bornée en $+\infty$; les autres tendent vers $\pm\infty$.
- Deux courbes solutions distinctes ne se coupent **jamais** (sinon, deux solutions différentes vérifieraient la même condition initiale) : par chaque point du plan passe une et une seule courbe solution.

4

Équations avec second membre

Soient a un réel et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (polynôme, exponentielle, cos, sin...). On étudie

$$(E) : y' = ay + g(x) \quad \text{et l'équation homogène associée} \quad (E_0) : y' = ay.$$

Le principe fondamental

Soit h une solution particulière de (E) . Pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f \text{ est solution de } (E) \iff f - h \text{ est solution de } (E_0).$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto C e^{ax} + h(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On sait que $h'(x) = ah(x) + g(x)$. En soustrayant : $f'(x) = af(x) + g(x) \iff f'(x) - h'(x) = a(f(x) - h(x))$, c'est-à-dire $(f - h)' = a(f - h)$. Les solutions de (E_0) sont les Ce^{ax} , donc $f - h = Ce^{ax}$. $\square$

À retenir : solution générale de (E) = solution générale de (E_0) + **une** solution particulière de (E) .

Méthode : résoudre une équation avec second membre

1. Résoudre l'équation homogène $(E_0) : y = Ce^{ax}$.
2. Trouver une solution particulière h : soit elle est **donnée** (on vérifie qu'elle convient), soit on la cherche sous la **forme indiquée** par l'énoncé : on remplace dans (E) et on identifie les coefficients.
3. Conclure : $y = Ce^{ax} + h(x)$. La condition initiale éventuelle s'applique **à la fin**, à cette solution complète.

Second membre $g(x)$	Forme habituelle de h (pour $a \neq 0$)
polynôme de degré n	polynôme de degré n (exemple : $h(x) = ax + \beta$)
ke^{mx} avec $m \neq a$	$h(x) = \alpha e^{mx}$
$k \cos(\omega x)$ ou $k \sin(\omega x)$	$h(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$

Pour identifier : deux polynômes égaux pour tout x ont les mêmes coefficients ; et si $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) = 0$ pour tout x , alors $A = B = 0$ (prendre $x = 0$, puis $x = \frac{\pi}{2\omega}$).

Exemple : second membre polynôme : $y' + 2y = x$

Solution particulière de la forme $h(x) = ax + \beta$: $h'(x) + 2h(x) = a + 2ax + 2\beta = 2ax + (a + 2\beta)$. Cette expression vaut x pour tout x si et seulement si $2a = 1$ et $a + 2\beta = 0$, soit $a = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{4}$: $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Homogène : $y' = -2y$ donne Ce^{-2x} . **Conclusion :** $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple : second membre exponentiel : $y' - y = e^{2x}$, avec $y(0) = 0$

1. $h(x) = e^{2x}$ est une solution particulière : $h'(x) - h(x) = 2e^{2x} - e^{2x} = e^{2x}$. ✓
2. $(E_0) : y' = y$ a pour solutions Ce^x , donc les solutions de (E) sont $y = Ce^x + e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
3. $y(0) = C + 1 = 0 \iff C = -1$: la solution cherchée est $f(x) = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$.

Exemple : second membre trigonométrique : $y' + y = \cos x$

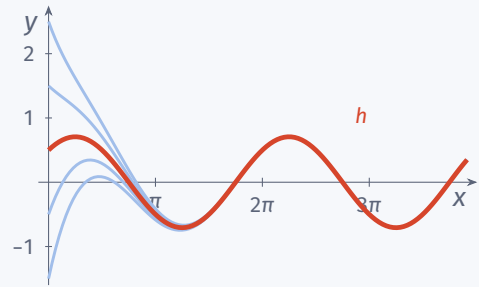
On cherche $h(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Alors $h'(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$ et

$$h'(x) + h(x) = (\alpha + \beta) \cos x + (\beta - \alpha) \sin x.$$

On veut $\alpha + \beta = 1$ et $\beta - \alpha = 0$: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Solutions : $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Comme $Ce^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, toutes les solutions « oublient » leur valeur de départ et finissent par osciller comme h : en physique, Ce^{-x} est le **régime transitoire** et h le **régime permanent**.



Attention, piège !

Si l'exposant m est égal à a , la forme ae^{mx} ne marche pas : pour $y' - y = e^x$, on trouve $h' - h = ae^x - ae^x = 0 \neq e^x$. L'énoncé indique alors une autre forme, par exemple $h(x) = \alpha x e^x$: $h'(x) - h(x) = ae^x$, donc $\alpha = 1$ et $h(x) = x e^x$ (voir aussi les astuces, section 11).

Remarque. L'équation $y' = ay + b$ est le cas $g(x) = b$ constant, avec la solution particulière constante $h = -\frac{b}{a}$. Le principe fondamental reste vrai pour les équations du second ordre $y'' + ay' + by = g(x)$ (section 7).

5 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

5.1 L'équation caractéristique

Définition : équation caractéristique

Soient a et b deux réels et $(E) : y'' + ay' + by = 0$. L'**équation caractéristique** de (E) est l'équation du second degré

$$r^2 + ar + b = 0, \quad \text{de discriminant} \quad \Delta = a^2 - 4b.$$

On l'obtient en remplaçant y'' par r^2 , y' par r et y par 1.

D'où vient-elle ? Pour $f(x) = e^{rx}$: $f'(x) = re^{rx}$ et $f''(x) = r^2 e^{rx}$, donc $f'' + af' + bf = (r^2 + ar + b)e^{rx}$. Comme $e^{rx} > 0$:

$$x \mapsto e^{rx} \text{ est solution de } (E) \iff r^2 + ar + b = 0.$$

Linéarité

Si f et g sont deux solutions de (E) , alors $C_1 f + C_2 g$ est solution de (E) pour tous réels C_1 et C_2 .

En effet : $(C_1 f + C_2 g)'' + a(C_1 f + C_2 g)' + b(C_1 f + C_2 g) = C_1 (f'' + af' + bf) + C_2 (g'' + ag' + bg) = 0$.

5.2 Le théorème des trois cas**Théorème (admis)**

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y'' + ay' + by = 0$ dépendent du signe de $\Delta = a^2 - 4b$; C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles quelconques.

Signe de Δ	Racines de $r^2 + ar + b = 0$	Solutions de (E)
$\Delta > 0$	deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine double $r = -\frac{a}{2}$	$y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$, avec $p = -\frac{a}{2}$, $q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$	$y = e^{px} (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx))$

Pourquoi $x e^{rx}$ quand $\Delta = 0$? Pour $f(x) = x e^{rx} : f'(x) = (1 + rx) e^{rx}$ et $f''(x) = (2r + r^2 x) e^{rx}$, donc

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = [(2r + a) + x(r^2 + ar + b)] e^{rx} = 0, \quad \text{car } r = -\frac{a}{2} \text{ et } r^2 + ar + b = 0.$$

Remarque. Les racines quand $\Delta < 0$. Les racines de $r^2 + ar + b = 0$ sont alors les nombres complexes $\frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}$. On le vérifie : pour $z = p \pm iq$, on a $(z - p)^2 = (\pm iq)^2 = -q^2$, soit $z^2 - 2pz + p^2 + q^2 = 0$; or $-2p = a$ et $p^2 + q^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4b - a^2}{4} = b$, donc $z^2 + az + b = 0$. L'étude complète des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ sera faite au chapitre « Nombres complexes (2) ». Pour $\Delta < 0$, **seuls p et q servent** : p (partie réelle) va dans l'exponentielle, q (partie imaginaire positive) dans cos et sin.

Cas particuliers à connaître

Équation	Racines	Solutions ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)
$y'' = 0$	0 (double)	$y = C_1 x + C_2$
$y'' + ay' = 0$ ($a \neq 0$)	0 et $-a$	$y = C_1 + C_2 e^{-ax}$
$y'' - k^2 y = 0$ ($k > 0$)	k et $-k$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$
$y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$)	$i\omega$ et $-i\omega$ ($p = 0, q = \omega$)	$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

Remarque. On peut garder les coefficients : pour $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ (avec $\alpha \neq 0$), l'équation caractéristique est $\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$; elle a les mêmes racines que l'équation obtenue après division par α .

6 Les trois cas en pratique

Méthode : résoudre $y'' + ay' + by = 0$

1. Écrire l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
2. Calculer $\Delta = a^2 - 4b$, puis les racines.
3. Écrire la solution générale correspondant au signe de Δ (tableau de la section 5).

Exemple : cas $\Delta > 0$: $y'' - y' - 2y = 0$

Équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$; $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$; $r_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.

Les solutions sont les fonctions $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Contrôle pour e^{2x} : $(4 - 2 - 2)e^{2x} = 0$ ✓ De même : $y'' - 9y = 0$ ($r = \pm 3$) donne $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$; $y'' + 3y' = 0$ ($r = 0$ ou $r = -3$) donne $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

Exemple : cas $\Delta = 0$: $y'' - 4y' + 4y = 0$

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$; $\Delta = 16 - 16 = 0$: racine double $r = 2$.

Les solutions sont les fonctions $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Avec les coefficients d'origine : $4y'' + 4y' + y = 0$ donne $4r^2 + 4r + 1 = (2r + 1)^2 = 0$, $r = -\frac{1}{2}$ et $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{x}{2}}$.

Exemple : cas $\Delta < 0$: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Équation caractéristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$; $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$; racines $\frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$: $p = -1$ et $q = 2$.

Les solutions sont les fonctions $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Vérification pour $f(x) = e^{-x} \cos 2x$: $f'(x) = -e^{-x}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$ et $f''(x) = e^{-x}(-3 \cos 2x + 4 \sin 2x)$, donc

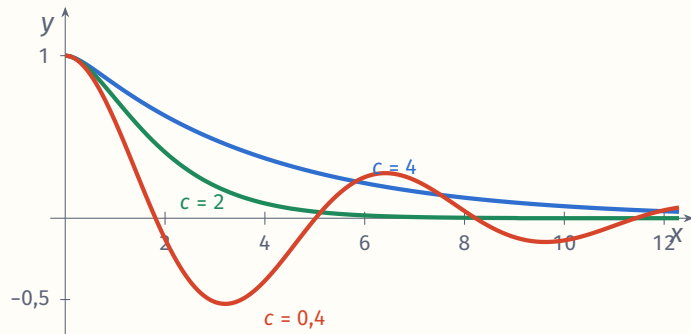
$$f'' + 2f' + 5f = e^{-x} [(-3 - 2 + 5) \cos 2x + (4 - 4) \sin 2x] = 0. \quad \checkmark$$

De même : $y'' - 2y' + 2y = 0$ ($r = 1 \pm i$) donne $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; $y'' + 9y = 0$ ($r = \pm 3i$) donne $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

6.1 Allure des solutions : les trois régimes

On résout $y'' + cy' + y = 0$, de discriminant $\Delta = c^2 - 4$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, pour trois valeurs du coefficient d'amortissement $c > 0$:

- $c = 4$ ($\Delta > 0$) : retour lent vers 0, sans oscillation (régime **apériodique**) ;
- $c = 2$ ($\Delta = 0$) : $y = (1 + x)e^{-x}$, retour le plus rapide sans oscillation (régime **critique**) ;
- $c = 0,4$ ($\Delta < 0$) : oscillations amorties (régime **pseudo-périodique**).



7 Conditions initiales

7.1 Deux conditions pour deux constantes

Théorème (admis)

Soient a, b, x_0, y_0 et y_1 des réels. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f telle que

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = y_1.$$

La solution générale contient **deux** constantes C_1 et C_2 : il faut donc **deux** conditions, la valeur de f et celle de f' au même point x_0 . Géométriquement, la courbe solution passe par $M_0(x_0, y_0)$ avec une tangente de coefficient directeur y_1 imposé ; en physique, on donne la position initiale **et** la vitesse initiale.

Méthode : trouver la solution telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$

1. Écrire la solution générale $f(x)$ (avec C_1 et C_2), **puis** calculer $f'(x)$.
2. Traduire les deux conditions : on obtient un système de deux équations d'inconnues C_1 et C_2 .
3. Résoudre le système, écrire f , puis contrôler $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

L'énoncé dit...	On écrit...
C_f passe par le point $A(0, 2)$	$f(0) = 2$
C_f admet au point $A(0, 2)$ une tangente horizontale	$f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$
la tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$	$f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$
la tangente en $A(1, 0)$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 5$	$f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$

Exemple : cas $\Delta > 0$: $y'' - y' - 2y = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$

D'après la section 6 : $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, donc $f'(x) = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$.

$$\begin{cases} f(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ f'(0) = -C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{en additionnant : } 3C_2 = 3).$$

Donc $f(x) = 2e^{-x} + e^{2x}$. Contrôle : $f(0) = 2 + 1 = 3$ et $f'(0) = -2 + 2 = 0$. ✓

Exemple : cas $\Delta = 0$: $y'' - 4y' + 4y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

$f(x) = (C_1 x + C_2) e^{2x}$ et $f'(x) = C_1 e^{2x} + 2(C_1 x + C_2) e^{2x} = (2C_1 x + C_1 + 2C_2) e^{2x}$.

$f(0) = C_2 = 1$ et $f'(0) = C_1 + 2C_2 = 0$, donc $C_1 = -2$: $f(x) = (1 - 2x) e^{2x}$.

Exemple : cas $\Delta < 0$: $y'' + 2y' + 5y = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$

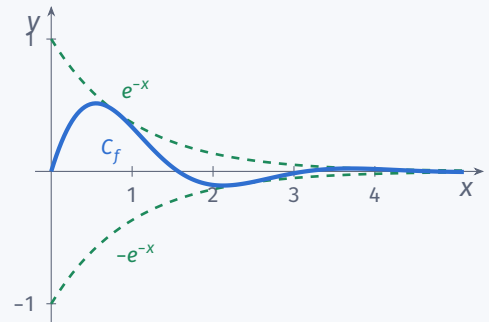
$f(x) = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, donc

$$f'(x) = e^{-x} [(2C_2 - C_1) \cos 2x - (C_2 + 2C_1) \sin 2x].$$

$f(0) = C_1 = 0$ et $f'(0) = 2C_2 - C_1 = 2$, donc $C_2 = 1$:

$$f(x) = e^{-x} \sin 2x.$$

Comme $-1 \leq \sin 2x \leq 1$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. La courbe oscille entre les courbes de $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ (les **enveloppes**), qu'elle touche lorsque $\sin 2x = \pm 1$: ce sont des **oscillations amorties**, et $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ (gendarmes).



Remarque. La condition peut être donnée en $x_0 \neq 0$. Pour $y'' + y = 0$ avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ et $f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, donc $C_2 = 2$ et $-C_1 = 1$: $f(x) = 2 \sin x - \cos x$.

Attention, piège !

Le théorème demande $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ au **même** point. Avec des conditions en deux points différents, tout peut arriver. Pour $y'' + y = 0$, $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$:

- $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$: $C_1 = 0$ et $C_2 = 3$: une unique solution, $x \mapsto 3 \sin x$;
- $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$: $C_1 = 0$, et $f(\pi) = -C_1 = 0$ est alors automatique : **une infinité** de solutions $x \mapsto C_2 \sin x$;
- $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1$: $C_1 = 0$ et $-C_1 = 1$ sont incompatibles : **aucune** solution.

7.2 Avec un second membre

Principe fondamental (second ordre)

Soient $(E) : y'' + ay' + by = g(x)$ et l'équation homogène $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$. Si h est une solution particulière de (E) , alors pour toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f \text{ est solution de } (E) \iff f - h \text{ est solution de } (E_0).$$

Solution générale de (E) = solution générale de (E_0) + h . (Même preuve qu'en section 4 : on soustrait $h'' + ah' + bh = g$.)

Exemple : $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

1. Solution particulière de la forme $h(x) = \alpha x + \beta$: $h'' - 3h' + 2h = 0 - 3\alpha + 2(\alpha x + \beta) = 2\alpha x + (2\beta - 3\alpha)$. On identifie : $2\alpha = 2$ et $2\beta - 3\alpha = -3$, d'où $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $h(x) = x$.

2. Homogène : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$, donc (E_0) a pour solutions les fonctions $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

3. Solutions de (E) : $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$, et $f'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 1$.

4. Conditions initiales (à la fin !) : $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + 2C_2 + 1 = 0$, d'où $C_2 = -1$ et $C_1 = 1$.

La solution cherchée est $f(x) = e^x - e^{2x} + x$. Contrôle : $f(0) = 1 - 1 + 0 = 0$ et $f'(0) = 1 - 2 + 1 = 0$.

✓

Remarque. Si le second membre est une constante c et si $b \neq 0$, la fonction constante $h = \frac{c}{b}$ est une solution particulière : par exemple, $y'' + 4y = 8$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2$.

8

L'oscillateur harmonique

Soit $\omega > 0$. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, c'est-à-dire $y'' = -\omega^2 y$, régit tout ce qui oscille **sans amortissement** : ressort, petites oscillations d'un pendule, circuit LC... Son équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ a pour racines $\pm i\omega$ ($p = 0$, $q = \omega$).

Théorème

Les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) sont les fonctions

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Chacune s'écrit aussi $x \mapsto R \cos(\omega x + \varphi)$ avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ et φ réel.

Elle est périodique de **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et oscille entre $-R$ et R : R est l'**amplitude**.

Démonstration de la forme $R \cos(\omega x + \varphi)$. Si $A = B = 0$, on prend $R = 0$. Sinon $R = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$ et $\left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(-\frac{B}{R}\right)^2 = 1$: le point de coordonnées $\left(\frac{A}{R}, -\frac{B}{R}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, donc il existe un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ et $\sin \varphi = -\frac{B}{R}$. Alors

$$R \cos(\omega x + \varphi) = R \cos \varphi \cos(\omega x) - R \sin \varphi \sin(\omega x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

Enfin, $\cos(\omega(x + T) + \varphi) = \cos(\omega x + \varphi + 2\pi) = \cos(\omega x + \varphi)$. □

amplitude	pulsation	période	fréquence	phase à l'origine
$R = \sqrt{A^2 + B^2}$	ω (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ (en s)	$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (en Hz)	φ (en rad)

Méthode : écrire $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ sous la forme $R \cos(\omega x + \varphi)$

1. Calculer $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.
2. Chercher φ tel que $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ et $\sin \varphi = -\frac{B}{R}$ (attention au signe -), à l'aide du cercle trigonométrique.
3. Contrôler en développant $R \cos(\omega x + \varphi)$.

Exemple : $y'' + 4y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ (le post-it de la couverture)

Ici $\omega = 2$: $f(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$ et

$f'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$.

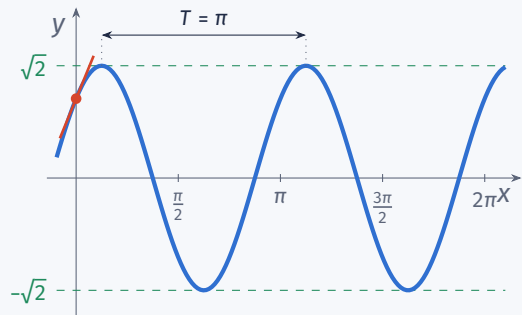
$f(0) = A = 1$ et $f'(0) = 2B = 2$, donc

$$f(x) = \cos 2x + \sin 2x.$$

$R = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
donc $\varphi = -\frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Amplitude $\sqrt{2}$, période $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Le maximum $\sqrt{2}$ est atteint lorsque $2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



De même, $y'' + 9y = 0$ avec $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 3$ donne $f(x) = \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x$; $R = 2$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$, donc $f(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, de période $\frac{2\pi}{3}$.

Remarque. La période $\frac{2\pi}{\omega}$ ne dépend pas des conditions initiales : un ressort oscille avec la même période, qu'on l'écarte peu ou beaucoup (**isochronisme**). En physique, on écrit $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où ω_0 est la **pulsation propre**. Attention au signe : $y'' - \omega^2 y = 0$ ne donne pas d'oscillations, mais $C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

9

Applications en physique et chimie

Méthode : résoudre un problème de modélisation

1. Identifier la fonction inconnue (tension, vitesse, nombre de noyaux...), sa variable (le temps t) et leurs **unités**.
2. Écrire l'équation sous une forme du cours ($y' = ay + b$, $y'' + \omega^2 y = 0$...) et repérer les constantes.
3. Résoudre, puis utiliser la condition initiale (l'état à $t = 0$).

4. Interpréter : limite en $+\infty$ (régime permanent), temps caractéristique, valeurs numériques avec unités.

9.1 Circuits RC et RL

Exemple : charge d'un condensateur : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$, $E = 6 \text{ V}$, $u_C(0) = 0$

Loi des mailles : $E = Ri + u_C$ avec $i = C u'_C$, donc
 $RC u'_C + u_C = E$, soit

$$u'_C = -\frac{1}{\tau} u_C + \frac{E}{\tau}, \quad \tau = RC.$$

C'est $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{\tau}$ et $-\frac{b}{a} = E$:

$u_C(t) = E + K e^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme $u_C(0) = E + K = 0$:

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

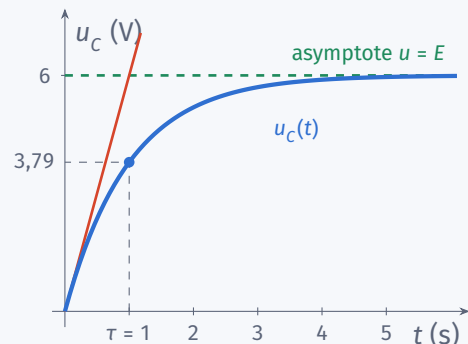
$\tau = RC = 10^4 \Omega \times 10^{-4} \text{ F} = 1 \text{ s}$ (car $\Omega \cdot \text{F} = \text{s}$), d'où

$u_C(t) = 6 \left(1 - e^{-t}\right)$ (en V, t en s).

$u_C(\tau) = E \left(1 - e^{-1}\right) \approx 0,63 E \approx 3,79 \text{ V}$ et

$u_C(5\tau) \approx 0,993 E$: le condensateur est

pratiquement chargé au bout de 5τ . La tangente à l'origine ($u = \frac{E}{\tau} t$) coupe l'asymptote $u = E$ en $t = \tau$: c'est ainsi qu'on lit τ sur un graphique.



- **Décharge.** Si $u_C(0) = E$ et si l'on court-circuite le générateur : $RC u'_C + u_C = 0$, donc $u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$.
- **Circuit RL.** Une bobine d'inductance L en série avec une résistance totale R : $Li' + Ri = E$ et $i(0) = 0$, d'où $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$ (en s). Pour $L = 0,5 \text{ H}$, $R = 50 \Omega$, $E = 5 \text{ V}$: $\tau = 10 \text{ ms}$ et $i(t) \rightarrow \frac{E}{R} = 0,1 \text{ A}$.

9.2 Décroissance radioactive et demi-vie

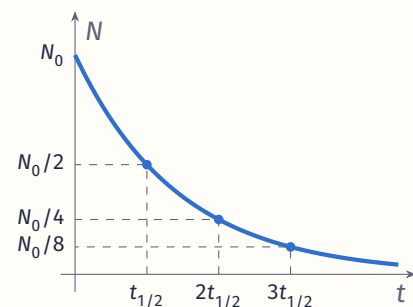
Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, où $\lambda > 0$ est la constante radioactive (en s^{-1} ou en an^{-1}). Avec $N(0) = N_0$:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

La **demi-vie** $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux s'est désintégrée :

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \iff \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}.$$

Plus généralement, $N(t + t_{1/2}) = \frac{1}{2} N(t)$: après n demi-vies, il reste $\frac{N_0}{2^n}$ noyaux.



Exemple : datation au carbone 14 ($t_{1/2} = 5730$ ans)

Un os fossile ne contient plus que 30 % de son carbone 14 initial. La constante radioactive est $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$, soit environ $1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$, et

$$e^{-\lambda t} = 0,3 \iff t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10}{3} = 5730 \times \frac{\ln \frac{10}{3}}{\ln 2} \approx 9\,950 \text{ ans.}$$

Remarque. Population. Une population qui croît proportionnellement à son effectif vérifie $P' = kP$ ($k > 0$) : $P(t) = P_0 e^{kt}$, et elle double tous les $\frac{\ln 2}{k}$. Des bactéries qui doublent toutes les 20 min sont $2^6 = 64$ fois plus nombreuses au bout de 2 h.

9.3 Refroidissement : la loi de Newton

Un corps de température $\theta(t)$, placé dans une pièce de température constante θ_a , vérifie la loi de Newton $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$ ($k > 0$). C'est $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $-\frac{b}{a} = \theta_a$:

$$\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \theta_a.$$

Exemple : un café qui refroidit

Un café à 80°C est posé dans une pièce à 20°C ; dix minutes plus tard, il est à 50°C . Quand sera-t-il à 30°C ?

$$\theta(t) = 20 + 60 e^{-kt} \quad (t \text{ en min}). \quad \theta(10) = 50 \iff e^{-10k} = \frac{1}{2} \iff k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,069 \text{ min}^{-1}.$$

$$\theta(t) = 30 \iff e^{-kt} = \frac{1}{6} \iff t = \frac{\ln 6}{k} = 10 \times \frac{\ln 6}{\ln 2} \approx 25,8 \text{ min, soit environ 26 minutes après le service.}$$

9.4 Chute verticale avec frottement

Un corps de masse m tombe verticalement ; l'air exerce une force de frottement opposée à la vitesse, d'intensité kv . La deuxième loi de Newton donne $m v' = mg - kv$, soit $v' = -\frac{k}{m}v + g$. Avec $v(0) = 0$:

$$v(t) = v_\ell \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{où } v_\ell = \frac{mg}{k} \text{ est la vitesse limite et } \tau = \frac{m}{k}.$$

Exemple : parachutiste avant l'ouverture : $m = 80 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$v_\ell = \frac{80 \times 10}{16} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (soit } 180 \text{ km/h)} \text{ et } \tau = \frac{80}{16} = 5 \text{ s} : v(t) = 50 \left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right). \text{ Au bout de } 10 \text{ s} : v(10) = 50(1 - e^{-2}) \approx 43,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Unités : kv est une force (en $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$), donc k s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau = \frac{m}{k}$ en secondes.

■ 9.5 Oscillations libres : ressort et circuit LC

	Ressort (raideur k , masse m)	Circuit LC
Équation	$m x'' + k x = 0$	$LC u_C'' + u_C = 0$
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Période propre	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Exemple : deux oscillateurs

- **Ressort** : $m = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg}$, $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{10} \approx 0,63 \text{ s}$. Écarté de 5 cm et lâché sans vitesse ($x(0) = 0,05 \text{ m}$, $x'(0) = 0$) : $x(t) = 0,05 \cos(10 t)$ (en m).
- **Circuit LC** : $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$: $LC = 10^{-6} \text{ s}^2$, $\omega_0 = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_0 = 2\pi \times 10^{-3} \text{ s} \approx 6,28 \text{ ms}$. Condensateur chargé sous 5 V, courant initial nul (donc $u_C'(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$) : $u_C(t) = 5 \cos(1000 t)$ (en V) et $i(t) = C u_C'(t) = -0,05 \sin(1000 t)$ (en A).

Remarque. Avec une résistance R en plus (circuit RLC série), $LC u_C'' + RC u_C' + u_C = 0$: selon le signe de Δ , on retrouve les régimes apériodique, critique et pseudo-périodique de la section 6.

10

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$y' = 2y + 6$: $y = Ce^{2x}$ ou $y = Ce^{2x} + 3$	il faut ajouter la solution constante $-\frac{b}{a} = -3$: $y = Ce^{2x} - 3$
$y' + 3y = 0$: $y = Ce^{3x}$	on isole y' : $y' = -3y$, donc $y = Ce^{-3x}$
$2y' = y + 4$: $a = 1$ et $b = 4$	on divise par 2 : $y' = \frac{1}{2}y + 2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ et $y = Ce^{\frac{x}{2}} - 4$
$y' = 3$: $y = Ce^{0x} - \frac{3}{0}$	ici $a = 0$: la formule ne s'applique pas ; $y = 3x + C$ (primitives)
$y' = 2y$ et $y(1) = 3$: $y = 3e^{2x}$	$Ce^2 = 3$: $y = 3e^{2(x-1)}$ ($3e^{2x}$ vaut 3 en 0, pas en 1)
$y' = 2y + 2$ et $y(0) = 1$: $Ce^0 = 1$, donc $y = e^{2x} - 1$	la condition porte sur la solution complète $y = Ce^{2x} - 1$: $C - 1 = 1$, donc $y = 2e^{2x} - 1$
les solutions de $y' + 2y = x$: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$	ce n'est qu'une solution : $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$
$y'' - 4y' + 4y = 0$: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}$	racine double : $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$ ($C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} = (C_1 + C_2) e^{2x}$ n'a qu'une constante)

racines $-1 \pm 2i$: $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	$p = -1$ dans l'exponentielle, $q = 2$ dans cos et sin : $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
$y'' + 4y = 0$: $r = \pm 2$, $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$	$r^2 = -4$: $r = \pm 2i$, $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
$y'' - 9y = 0$: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$	$r^2 = 9$: $r = \pm 3$, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$
$y'' + 3y' = 0$: équation caractéristique $r^2 + 3r = 0$	$r^2 + 3r = 0$ (ici $b = 0$) : $r \in \{0; -3\}$ et $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$
$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ et $y'(0) = 2$: $C_2 = 2$	$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$: $y'(0) = 2C_2 = 2$, $C_2 = 1$
$\cos 2x + \sin 2x = 2 \cos(2x + \varphi)$ ($R = A + B$)	$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2}$: $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
la période de $x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ est 2π	elle vaut $\frac{2\pi}{\omega}$; pour $\cos 2x$: π
deux courbes solutions de $y'' + y = 0$ ne se coupent jamais	cos et sin se coupent en $\frac{\pi}{4}$; l'unicité exige la même valeur et la même dérivée
demi-vie : $t_{1/2} = \lambda \ln 2$	$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
$R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$: $\tau = 10 \times 100 = 1000 \text{ s}$	unités SI : $\tau = 10^4 \times 10^{-4} = 1 \text{ s}$

11

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : lire la solution sans calcul

Premier ordre. Pour $y' = ay + b$ ($a \neq 0$), d'équilibre $\ell = -\frac{b}{a}$, la solution telle que $y(x_0) = y_0$ est

$$f(x) = \ell + (y_0 - \ell) e^{a(x-x_0)} \quad (\text{équilibre} + \text{écart initial} \times \text{exponentielle}).$$

Exemple : $y' = -3y + 6$, $y(0) = 5$: $\ell = 2$, donc $f(x) = 2 + 3e^{-3x}$. En physique, $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{-kt}$ s'écrit directement.

Oscillateur. Pour $y'' + \omega^2 y = 0$, la solution telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$ est

$$f(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega x).$$

Exemple : $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$: $f(x) = \cos 2x + \frac{2}{2} \sin 2x = \cos 2x + \sin 2x$.

★ Astuce de concours : superposition des seconds membres

Si h_1 est solution de $y' = ay + g_1(x)$ et h_2 solution de $y' = ay + g_2(x)$, alors $h_1 + h_2$ est solution de $y' = ay + g_1(x) + g_2(x)$ (on additionne les deux égalités). On découpe le second membre !
Exemple : $y' + y = x + e^x$. $h_1(x) = x - 1$ vérifie $h_1' + h_1 = x$ et $h_2(x) = \frac{1}{2}e^x$ vérifie $h_2' + h_2 = e^x$, donc

$$y = Ce^{-x} + x - 1 + \frac{1}{2}e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

★ **Astuce de concours : le changement de fonction $z = y e^{-ax}$**

Pour (E) : $y' = ay + g(x)$, on pose $z(x) = y(x) e^{-ax}$. Alors $z' = (y' - ay) e^{-ax}$, donc

$$y \text{ solution de (E)} \iff z'(x) = g(x) e^{-ax} :$$

il suffit de trouver une **primitive**. C'est la démonstration de la section 2 ; elle marche même quand la forme ae^{mx} échoue (section 4) :

- $y' - y = e^x$: $z = y e^{-x}$ vérifie $z' = 1$, donc $z = x + C$ et $y = (x + C) e^x$;
- $y' + 2y = e^{-2x} \cos x$: $z = y e^{2x}$ vérifie $z' = \cos x$, donc $z = \sin x + C$ et $y = (\sin x + C) e^{-2x}$.

★ **Astuce de concours : une équation non linéaire : poser $z = \frac{1}{y}$**

L'équation **logistique** $y' = y(1 - y)$ (croissance d'une population limitée) n'est pas linéaire. Pour une solution y qui ne s'annule pas, on pose $z = \frac{1}{y}$:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = -\frac{1}{y} + 1 = -z + 1, \quad \text{donc} \quad z = 1 + Ce^{-x} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}.$$

Avec $y(0) = \frac{1}{2}$: $z(0) = 2$, donc $C = 1$ et $y = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$ (la courbe en S du chapitre 8, qui tend vers 1).

★ **Astuce de concours : $f'(x) = f(-x)$ donne $f'' = -f$**

Cherchons les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout réel x .

Analyse. f' est dérivable (composée), et en dérivant : $f''(x) = -f'(-x) = -f(-(-x)) = -f(x)$. Donc $f'' + f = 0$ et $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

Synthèse. $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f(-x) = A \cos x - B \sin x$: ils sont égaux pour tout x si et seulement si $B = A$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto A(\cos x + \sin x)$, $A \in \mathbb{R}$. La condition $f'' = -f$ était **nécessaire**, pas suffisante : la synthèse est indispensable !

★ **Astuce de concours : retrouver l'équation à partir des solutions**

Si r_1 et r_2 sont les racines, l'équation caractéristique est $r^2 - Sr + P = 0$ avec $S = r_1 + r_2$ et $P = r_1 r_2$; l'équation est donc $y'' - Sy' + Py = 0$.

- $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$: $r \in \{1; 3\}$, $S = 4$, $P = 3$: $y'' - 4y' + 3y = 0$;
- $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$: racine double -1 : $y'' + 2y' + y = 0$; de même, $x e^{3x}$ est solution de $y'' - 6y' + 9y = 0$;
- $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$: $r = 2 \pm 3i$, $S = 4$, $P = 2^2 + 3^2 = 13$: $y'' - 4y' + 13y = 0$;
- premier ordre : $y = C e^{-2x} + 3$: $a = -2$ et $-\frac{b}{a} = 3$, donc $b = 6$: $y' = -2y + 6$.

★ **Astuce de concours : l'amplitude par « l'énergie »**

Si $y'' + \omega^2 y = 0$, alors $(y'^2 + \omega^2 y^2)' = 2y'y'' + 2\omega^2 yy' = 2y'(y'' + \omega^2 y) = 0$: la quantité $y'^2 + \omega^2 y^2$ est **constante** (conservation de l'énergie $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$). Pour $y = R \cos(\omega x + \varphi)$, elle vaut $\omega^2 R^2$, d'où, sans résoudre :

$$R = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (\text{avec } y(0) = y_0, y'(0) = v_0).$$

Exemples : $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$: $R = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; $y'' + 9y = 0, y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = 3$: $R = \sqrt{3 + 1} = 2$.

★ **Astuce de concours : abaisser l'ordre : poser $z = y'$**

Dans $y'' + ay' = g(x)$, la fonction y elle-même n'apparaît pas : $z = y'$ vérifie $z' = -az + g(x)$, du premier ordre.

Exemple : $y'' + 2y' = 4$: $z' = -2z + 4$, donc $z = 2 + Ce^{-2x}$, puis (primitives) $y = 2x + K_1 e^{-2x} + K_2$ avec $K_1 = -\frac{C}{2}$.

En physique : la position $x(t)$ d'un corps en chute avec frottement vérifie $x'' = g - \frac{k}{m} x'$; on travaille avec la vitesse $v = x'$.

★ **Astuce de concours : lire a et b sur un graphique**

Si f est solution de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) et si l'on connaît $f(0) = y_0$, la pente $s = f'(0)$ de la tangente en 0 et l'asymptote horizontale $y = \ell$ (cas $a < 0$), alors

$$\ell = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad s = a y_0 + b = a(y_0 - \ell), \quad \text{d'où} \quad a = \frac{s}{y_0 - \ell} \quad \text{et} \quad b = -a\ell.$$

Exemple : la courbe de charge de la section 9.1 donne $y_0 = 0, s = 6$ et $\ell = 6$: $a = \frac{6}{0-6} = -1$ et $b = 6$, soit $u'_C = -u_C + 6$ ($\tau = 1$ s).

12

L'essentiel du chapitre en une page

Vocabulaire

f est solution sur I : f est dérivable et l'égalité est vraie **pour tout** $x \in I$.

Vérifier : calculer f' (et f''), remplacer, simplifier.

L'équation $y' = ay$

$$y = Ce^{ax} \quad (C \in \mathbb{R}) \quad y(x_0) = y_0 : y = y_0 e^{a(x-x_0)}$$

$$\text{Preuve : } (y e^{-ax})' = (y' - ay) e^{-ax} = 0.$$

L'équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

$$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{équilibre : } \ell = -\frac{b}{a}$$

$$y(x_0) = y_0 : y = \ell + (y_0 - \ell) e^{a(x-x_0)} \quad (\text{unique})$$

$a < 0$: toutes les solutions tendent vers ℓ .

$$\text{D'abord isoler } y' : 2y' + y = 2 \iff y' = -\frac{1}{2}y + 1.$$

Second membre (E) : $y' = ay + g(x)$

h solution particulière : f solution de (E) $\iff$
 $f - h$ solution de $(E_0) : y' = ay$.

$y = Ce^{ax} + h(x)$; condition initiale **à la fin**.

Formes de h : polynôme $\rightarrow$ polynôme ; ke^{mx}
 $(m \neq a) \rightarrow \alpha e^{mx}$; $k \cos \omega x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$.

Superposition : $g_1 + g_2 \rightarrow h_1 + h_2$.

$$z = y e^{-ax} : z' = g(x) e^{-ax} \quad (\text{une primitive suffit}).$$

Applications (variable t)

$$\text{RC : } u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tau = RC ; \text{ décharge : } E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{RL : } i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tau = \frac{L}{R}$$

$$\text{Radioactivité : } N = N_0 e^{-\lambda t}, t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\text{Newton : } \theta = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$$

$$\text{Chute : } m v' = mg - kv, v_\ell = \frac{mg}{k}, \tau = \frac{m}{k}$$

$$\text{Ressort : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \text{ LC : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$y'' + ay' + by = 0 : r^2 + ar + b = 0, \Delta = a^2 - 4b$$

$$\Delta > 0 \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$\Delta = 0 \quad y = (C_1 x + C_2) e^{rx}, r = -\frac{a}{2}$$

$$\Delta < 0 \quad y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$$

$$\text{avec } p \pm iq = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (p \text{ dans } e^{px}, q \text{ dans } \cos, \sin).$$

$$y'' = 0 : C_1 x + C_2 \quad y'' + ay' = 0 : C_1 + C_2 e^{-ax}$$

$$y'' - k^2 y = 0 : C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

Conditions initiales

$f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$: une **unique** solution.

Écrire f et f' avec C_1, C_2 , puis résoudre le système.

$y'' + ay' + by = g$: solutions de $(E_0) + h$, conditions à la fin.

Oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$)

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x = R \cos(\omega x + \varphi)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \cos \varphi = \frac{A}{R}, \sin \varphi = -\frac{B}{R}$$

$$\text{période } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{fréquence } N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = v_0 : y = y_0 \cos \omega x + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega x$$

$$y'^2 + \omega^2 y^2 \text{ est constant : } R = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2 : y = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Astuces

$$\text{Racines } r_1, r_2 \rightarrow y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$$

$$f'(x) = f(-x) \Rightarrow f'' = -f \quad (\text{puis synthèse})$$

$$y' = y(1 - y) : \text{poser } z = \frac{1}{y}, z' = -z + 1$$

$$y'' + ay' = g(x) : \text{poser } z = y'$$

Deux courbes solutions distinctes de $y' = ay + b$ ne se coupent jamais.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

13 Niveau 1 • Bases

Sauf mention contraire, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et les lettres C, C_1, C_2, A, B désignent des constantes réelles.

Exercice 1 Vérifier une solution ★

corrigé p. 44

1. Vérifier que chaque fonction est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle indiquée.

a) $f(x) = 3e^{-2x}$, $y' + 2y = 0$ b) $g(x) = 2 - e^{-3x}$, $y' = -3y + 6$

c) $h(x) = 2 \cos 3x - \sin 3x$, $y'' + 9y = 0$ d) $k(x) = xe^x$, $y'' - 2y' + y = 0$

2. Les fonctions $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x - 1$ sont-elles solutions de l'équation $y' = y + 1$?

3. Déterminer les réels m tels que la fonction $x \mapsto e^{mx}$ soit solution de $y'' - y' - 6y = 0$.

Exercice 2 L'équation $y' = ay$ ★

corrigé p. 44

1. Résoudre les équations différentielles : a) $y' = 5y$ b) $2y' + y = 0$ c) $3y' - 2y = 0$.

2. Déterminer la solution f de $y' = 3y$ telle que $f(\ln 2) = 16$.

3. Déterminer la solution g de $2y' + y = 0$ dont la courbe passe par le point $A(2, e)$.

Exercice 3 L'équation $y' = ay + b$ ★

corrigé p. 44

1. Résoudre : a) $y' = 2y - 6$ b) $y' + 3y = 12$ c) $2y' - y = 4$ d) $4y' + y + 2 = 0$.

2. Donner la solution constante de chacune de ces quatre équations.

3. Montrer que toutes les solutions de l'équation b) ont la même limite en $+\infty$. Est-ce vrai pour l'équation a) ?

Exercice 4 Conditions initiales ★

corrigé p. 45

Dans chaque cas, déterminer l'unique solution f de l'équation qui vérifie la condition donnée.

a) $y' = -2y + 4$, $f(0) = 5$ b) $y' - 3y = 6$, $f(1) = 0$ c) $y' + y = 3$, $f(\ln 2) = 1$ d) $y' = y + 2$, $f'(0) = 3$

Exercice 5 Avec un second membre ★

corrigé p. 45

- On considère $(E_1) : y' + 3y = 6x + 5$. a) Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = ax + b$ soit solution de (E_1) . b) Montrer que g est solution de (E_1) si et seulement si $g - p$ est solution de $(E_0) : y' + 3y = 0$. c) En déduire les solutions de (E_1) , puis celle qui prend la valeur 3 en 0.
- On considère $(E_2) : y' - y = 3e^{-2x}$. Déterminer le réel a tel que $x \mapsto ae^{-2x}$ soit solution de (E_2) , puis résoudre (E_2) .

Exercice 6 Le second ordre : les trois cas ★

corrigé p. 45

Résoudre les équations différentielles : a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; b) $y'' + 3y' = 0$; c) $y'' - 6y' + 9y = 0$; d) $4y'' + 4y' + y = 0$; e) $y'' + 2y' + 5y = 0$; f) $y'' + 16y = 0$.

Exercice 7 Second ordre et conditions initiales ★

corrigé p. 46

Déterminer la solution f de chaque équation qui vérifie les conditions indiquées.

- a) $y'' - y' - 2y = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$; b) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$;
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$.

Exercice 8 L'oscillateur harmonique ★

corrigé p. 46

On considère l'équation différentielle $(E) : 4y'' + \pi^2 y = 0$.

- Résoudre (E) , puis déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{\pi}{2}$.
- Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire l'amplitude et la période de f .
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, 4]$, puis déterminer les réels en lesquels f atteint son maximum.

14

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Datation au carbone 14 ★★**

corrigé p. 46

Dans un organisme mort, le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 (t en années) vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$, où $\lambda > 0$ est la constante radioactive, et $N(0) = N_0$.

- Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t .
- La demi-vie T vérifie $N(T) = \frac{N_0}{2}$. Montrer que $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$, puis que $N(t + T) = \frac{1}{2}N(t)$ pour tout $t \geq 0$.
- Pour le carbone 14, $T = 5730$ ans : donner une valeur approchée de λ . Un os ne contient plus que 30 % de son carbone 14 initial : estimer son âge.
- Au bout de combien de demi-vies reste-t-il moins de 1 % des noyaux initiaux ?

Exercice 10 Charge d'un condensateur ★★

corrigé p. 47

Un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$, initialement déchargé, est chargé à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$ par un générateur de tension constante $E = 6 \text{ V}$. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur (t en secondes) vérifie $RC u'(t) + u(t) = E$ et $u(0) = 0$.

- Calculer la constante de temps $\tau = RC$, puis écrire l'équation sous la forme $u' = au + b$.
- Déterminer $u(t)$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Interpréter.
- Montrer que la tangente en 0 à la courbe de u coupe la droite $u = E$ au point d'abscisse τ .

4. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 99 % de E ?
5. L'intensité du courant est $i(t) = C u'(t)$. Calculer $i(t)$ et $i(0)$; comparer $i(0)$ à $\frac{E}{R}$.

Exercice 11 Un problème complet (examen) ★★

corrigé p. 47

Partie I. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2e^{-x}$.

1. Vérifier que la fonction $u(x) = 2xe^{-x}$ est solution de (E).
2. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - u$ est solution de (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Résoudre (E_0) , puis (E). Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie II. Soit $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$; étudier les branches infinies de C_f .
2. Montrer, en utilisant (E), que $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
4. Montrer que $f''(x) = (2x - 3)e^{-x}$; en déduire un point d'inflexion I de C_f . Tracer T et C_f .

Exercice 12 Second ordre et étude de fonction (examen) ★★

corrigé p. 48

Partie I. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 4$.

1. Déterminer une solution constante de (E) ; en déduire que g est solution de (E) si et seulement si $g - 1$ est solution de (E_0) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. Résoudre (E_0) , puis (E), et déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

Partie II. Soit $f(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; étudier les branches infinies de C_f .
2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f et en déduire que $e^{2x} \leq \frac{1}{1-2x}$ pour $x < \frac{1}{2}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I à préciser, puis tracer C_f .

Exercice 13 Second membre trigonométrique ★★

corrigé p. 48

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -2 \sin x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = a \cos x + b \sin x$ soit solution de (E).
2. Résoudre (E).
3. Montrer que (E) a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$; l'écrire sous la forme $R \cos(x - \varphi)$, $R > 0$.
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - p(x))$.

Exercice 14 Refroidissement d'un café ★★

corrigé p. 49

Une tasse de café à 90 °C est posée dans une pièce à 20 °C. D'après la loi de Newton, sa température $\theta(t)$ (t en minutes) vérifie $\theta'(t) = -k(\theta(t) - 20)$, avec $k > 0$.

1. Montrer que $\theta(t) = 20 + 70e^{-kt}$ pour tout $t \geq 0$.
2. Au bout de 10 minutes, le café est à 55 °C. Calculer k , puis la température au bout de 20 minutes.
3. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 30 °C ? Peut-il atteindre 20 °C ?

Exercice 15 Oscillations amorties (examen) ★★

corrigé p. 49

Partie I. Résoudre (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$, puis déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

Partie II. Soit $f(x) = e^{-x} \cos x$ pour $x \geq 0$, et Γ la courbe de la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$.

1. Montrer que $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = -\sqrt{2} e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Montrer que C_f et Γ ont la même tangente en chacun de leurs points communs, à préciser.

Exercice 16 Remonter à l'équation ★★

corrigé p. 49

1. Déterminer les réels a et b pour que l'équation $y'' + ay' + by = 0$ admette pour solution(s) : a) $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^{3x}$; b) $x \mapsto xe^{5x}$; c) $x \mapsto e^{2x} \sin 3x$.
2. Déterminer l'équation $y' = ay + b$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x} + 5$ ($C \in \mathbb{R}$).

15

Niveau 3 · Approfondissement**Exercice 17 Superposition et résonance ★★★**

corrigé p. 50

1. Déterminer une solution p_1 de $y' - 2y = 4x$ de la forme $ax + b$, et une solution p_2 de $y' - 2y = 3e^x$ de la forme ce^x .
2. En déduire les solutions de (E) : $y' - 2y = 4x + 3e^x$, puis la solution de (E) qui s'annule en 0.
3. On considère (F) : $y' - 2y = e^{2x}$. Montrer que (F) n'a aucune solution de la forme ce^{2x} , mais qu'elle en a une de la forme axe^{2x} . Résoudre (F).

Exercice 18 Chute avec frottement ★★★

corrigé p. 50

Un parachutiste de masse $m = 80$ kg saute sans vitesse initiale. Avant l'ouverture du parachute, l'air exerce une force de frottement $-kv$ avec $k = 16 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Sa vitesse $v(t)$ (t en s) vérifie $mv'(t) = mg - kv(t)$ et $v(0) = 0$.

1. Montrer que $v' = -0,2v + 10$, puis que $v(t) = 50(1 - e^{-t/5})$.
2. Quelle est la vitesse limite v_ℓ ? À quel instant le parachutiste atteint-il 95 % de v_ℓ ?
3. La distance parcourue $d(t)$ vérifie $d' = v$ et $d(0) = 0$: déterminer $d(t)$, puis $d(20)$.

Exercice 19 Amortissement : selon un paramètre ★★★

corrigé p. 50

Pour un réel $m \geq 0$, on considère l'équation $(E_m) : y'' + 2my' + y = 0$.

1. Donner, selon la valeur de m , la forme générale des solutions de (E_m) .
2. Pour $m = \frac{5}{4}$, déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.
3. Si $m > 0$, montrer que toutes les solutions de (E_m) tendent vers 0 en $+\infty$. Et si $m = 0$?

Exercice 20 Croissance logistique ★★★

corrigé p. 51

Une population (en milliers d'individus, en fonction du temps x) est modélisée par une fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que (E) : $f' = 2f - f^2$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. On pose $g = \frac{1}{f}$. Montrer que f vérifie (E) si et seulement si g est solution de (F) : $y' = -2y + 1$.

- Résoudre (F), puis déterminer f . Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montrer que $f' = 1 - (f - 1)^2$. En déduire que la vitesse de croissance f' est maximale à l'instant x_0 tel que $f(x_0) = 1$, et calculer x_0 .

Exercice 21 Un coefficient variable ★★★

corrigé p. 51

On considère l'équation (E) : $y' + 2xy = 2x$; son coefficient $2x$ n'est pas constant.

- Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f(x)e^{x^2}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = 2xe^{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire les solutions de (E).
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 3$; étudier sa parité, ses variations et ses limites.

Exercice 22 Le changement de fonction $z = ye^{-x}$ ★★★

corrigé p. 51

On considère l'équation (E) : $y'' - 2y' + y = e^x$.

- Expliquer pourquoi (E) n'a aucune solution de la forme ae^x , ni de la forme axe^x .
- Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z(x) = f(x)e^{-x}$. Montrer que $f'' - 2f' + f = z''e^x$.
- En déduire que f est solution de (E) si et seulement si $z'' = 1$, puis résoudre (E).
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 23 Oscillations électriques (circuit LC) ★★★

corrigé p. 52

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, portant la charge $Q_0 = 6 \times 10^{-5} \text{ C}$, est relié à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$ (résistance négligeable). La charge $q(t)$ du condensateur (t en s) vérifie $Lq'' + \frac{q}{C} = 0$, $q(0) = Q_0$ et $q'(0) = 0$; l'intensité est $i = q'$.

- Montrer que $q'' + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; calculer ω_0 et la période propre T_0 .
- Déterminer $q(t)$ et $i(t)$, puis la valeur maximale de l'intensité $|i(t)|$.
- Sans utiliser la question 2, montrer que l'énergie $E(t) = \frac{q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}L i(t)^2$ est constante, et calculer sa valeur.

16

Niveau 4 · Concours**Exercice 24 Quand $f'(x) = f(-x)$ ★★★★★**

corrigé p. 52

- Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(-x)$ pour tout x . Montrer que f'' existe et que $f'' + f = 0$.
- En déduire toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Déterminer de même les f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) + f(-x) = e^x$ pour tout x (on cherchera une solution particulière de l'équation du second ordre obtenue sous la forme $ae^x + be^{-x}$).

Exercice 25 L'exponentielle caractérisée ★★★★★

corrigé p. 53

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y .

- Montrer que $f(0) = 1$.
- En dérivant par rapport à y (avec x fixé), montrer que $f' = af$, où $a = f'(0)$. En déduire f .
- Déterminer de même les g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g(x + y) = g(x) + g(y) + 2xy$ pour tous x, y .

Exercice 26 Démontrer le théorème pour $y'' + y = 0$ ★★★★★

corrigé p. 53

1. Soit g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'' + g = 0$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. En étudiant $\varphi = g^2 + g'^2$, montrer que g est la fonction nulle.
2. Soit f une solution de $y'' + y = 0$. Montrer que $f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Application : avec $x \mapsto \sin(x + a)$ (a fixé), retrouver $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$.

Exercice 27 Conditions aux deux bords ★★★★★

corrigé p. 53

1. Résoudre $y'' + y = 0$ avec : a) $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$; b) $y(0) = 0, y(\pi) = 0$; c) $y(0) = 0, y(\pi) = 1$.
2. Soit $\omega > 0$. Montrer que l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une solution non nulle vérifiant $y(0) = y(1) = 0$ si et seulement si $\omega = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 28 Le phénomène de résonance ★★★★★

corrigé p. 54

1. Trouver une solution de $y'' + 4y = 3 \cos x$ de la forme $a \cos x$; montrer que toutes les solutions sont bornées.
2. On considère $(E) : y'' + 4y = 4 \cos 2x$. Montrer que (E) n'a aucune solution de la forme $a \cos 2x + b \sin 2x$, puis déterminer une solution de la forme $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$. Résoudre (E) .
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 0$, et montrer qu'elle n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$. Interpréter.

Exercice 29 Un système différentiel ★★★★★

corrigé p. 54

On cherche les fonctions x et y , dérivables sur $\mathbb{R}$ (de la variable t), telles que $x' = x + 2y$, $y' = 2x + y$, $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

1. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Déterminer u et v , puis x et y .
2. Autre méthode. Montrer que $x'' - 2x' - 3x = 0$; retrouver x , puis y .
3. Calculer $x(t)^2 - y(t)^2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

Exercice 30 Une équation d'Euler ★★★★★

corrigé p. 54

On considère, sur $]0, +\infty[$, l'équation $(E) : x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$. À une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^t)$.

1. Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction de $f'(e^t)$ et $f''(e^t)$.
2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de $(F) : z'' - 4z' + 4z = 0$.
3. Résoudre (F) et en déduire les solutions de (E) (on pourra remarquer que $f(x) = g(\ln x)$).
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

17

L'équation $y' = ay + b$

Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ($C \in \mathbb{R}$) ; pour $b = 0$, on retrouve $y' = ay$, de solutions $x \mapsto Ce^{ax}$. Avant de lire a et b , on **isole** y' : par exemple, $2y' + 3y = 1$ s'écrit $y' = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$. Une condition $y(x_0) = y_0$ fixe la constante C (et la solution est alors unique).

Exercice 31 Résolutions directes ★

corrigé p. 55

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 3y$

c) $2y' - y = 0$

e) $3y' + y = 4$

b) $y' + 5y = 0$

d) $y' = -2y + 6$

f) $5y - y' = 10$

2. Déterminer la solution f de chacune des équations suivantes qui vérifie la condition indiquée.

a) $y' = 3y$ et $f(0) = -2$;

c) $3y' + y = 4$ et $f(3) = 3$;

b) $y' = -2y + 6$ et $f(0) = 1$;

d) $5y - y' = 10$ et $f'(0) = 5$.

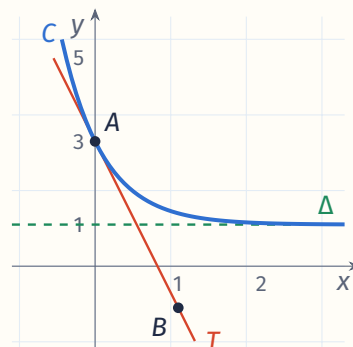
3. Vérifier, sans résoudre l'équation, que la fonction $g : x \mapsto 3 - 4e^{\frac{x}{3}}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $3y' - y = -3$.

Exercice 32 De la solution à l'équation ★

corrigé p. 55

Dans cet exercice, a et b désignent des réels, avec $a \neq 0$.

1. Toutes les solutions d'une équation (E) : $y' = ay + b$ ont pour limite 2 en $+\infty$, et la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ vérifie $f'(0) = 8$. Déterminer (E).
2. La fonction $f : x \mapsto 5e^{2x} - 3$ est solution d'une équation $y' = ay + b$. Déterminer a et b .
3. Une solution f d'une équation $y' = ay + b$ vérifie $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ et $f''(0) = 6$.
 - a) Montrer que $f'' = af'$, puis en déduire a et b .
 - b) Déterminer f .
4. La courbe C ci-contre est celle d'une solution f d'une équation (E) : $y' = ay + b$. On sait que :
 - C passe par le point $A(0, 3)$;
 - la tangente T à C en A passe par le point $B(1, -1)$;
 - la droite $\Delta : y = 1$ est asymptote à C en $+\infty$.
 Déterminer a, b puis l'expression de $f(x)$.

**Exercice 33** Une étude complète ★★

corrigé p. 56

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 3$.

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe C_f passe par le point $A(2, 1)$.
3. Calculer $f'(x)$, puis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f et interpréter graphiquement la limite en $+\infty$.
4. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
5. Donner l'équation de la tangente T à C_f en A . Montrer que $f'' = -\frac{1}{2}f'$, en déduire la concavité de C_f , puis la position de C_f par rapport à T .

Exercice 34 Des conditions de toutes sortes ★★

corrigé p. 56

1. Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = -2f$ et $f(\ln 3) = 2$.
2. Déterminer la solution g de $y' = -y + 2$ dont la courbe admet, au point d'abscisse 0, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.
3. Déterminer la solution k de l'équation $2y' = y - 4$ qui est bornée sur $[0, +\infty[$.
4. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x : $f'(x) - f(x) = f(0)$.
5. Montrer que les tangentes, au point d'abscisse 0, aux courbes de toutes les solutions de l'équation $y' = 2y - 2$ passent par un même point, que l'on précisera.

Exercice 35 Discussion selon un paramètre ★★★

corrigé p. 57

Pour tout réel m , on note f_m la solution de l'équation (E_m) : $y' = my + 1$ telle que $f_m(0) = 0$, et C_m sa courbe.

1. Montrer, sans résoudre (E_m) , que toutes les courbes C_m ont la même tangente T à l'origine, dont on donnera l'équation.
2. Exprimer $f_m(x)$ en fonction de x et de m : d'abord pour $m \neq 0$, puis pour $m = 0$.
3. Déterminer, selon les valeurs de m , la limite de f_m en $+\infty$. Pour quelles valeurs de m cette limite est-elle finie ?
4. Montrer que, pour tout réel x fixé : $\lim_{m \rightarrow 0} f_m(x) = f_0(x)$.
5. En utilisant l'inégalité $e^u \geq 1 + u$ (vraie pour tout réel u), étudier la position de C_m par rapport à T selon le signe de m .

Exercice 36 Changements de fonction ★★★

corrigé p. 57

Les deux équations de cet exercice ne sont pas de la forme $y' = ay + b$, mais un changement de fonction les y ramène.

1. On cherche la fonction f , dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, solution de (F) : $y' = y - \frac{1}{y}$ et telle que $f(0) = \sqrt{2}$.
 - a) Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (F) si et seulement si la fonction $z = f^2$ est solution de (G) : $z' = 2z - 2$.
 - b) Résoudre (G) , puis en déduire que $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$.
 - c) Étudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^x) = 0$ et que $f(x) > e^x$ pour tout réel x : que peut-on en déduire pour la courbe de f et celle de la fonction exponentielle ?
2. On cherche la fonction g , dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, solution de (H) : $y' = y(1 - \ln y)$ et telle que $g(0) = 1$. En posant $z = \ln g$, déterminer $g(x)$, puis les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

18

Équations avec second membre

Pour (E) : $y' = ay + g(x)$, on cherche **une** solution particulière h (donnée, ou sous la forme indiquée) ; alors f est solution de $(E) \iff f - h$ est solution de (E_0) : $y' = ay$. Les solutions de (E) sont les $x \mapsto Ce^{ax} + h(x)$ ($C \in \mathbb{R}$) ; une condition initiale s'applique **à la fin**.

Exercice 37 Solution particulière fournie ★

corrigé p. 58

Pour chacune des équations suivantes : a) vérifier que la fonction h indiquée est solution de (E) ; b) résoudre (E) ; c) déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

1. (E) : $y' + 4y = 4x + 5$, $h(x) = x + 1$;
2. (E) : $y' - 2y = -3e^{-x}$, $h(x) = e^{-x}$;
3. (E) : $y' + 2y = 5 \cos x$, $h(x) = 2 \cos x + \sin x$;
4. (E) : $2y' + y = x^2 + 4x$, $h(x) = x^2$.

Exercice 38 Chercher sous la forme indiquée ★

corrigé p. 59

Dans chaque cas, déterminer une solution particulière h de l'équation sous la forme indiquée, puis résoudre l'équation.

1. $y' + y = x^2$, avec $h(x) = ax^2 + bx + c$.
2. $y' + 3y = 5e^{2x}$, avec $h(x) = ae^{2x}$. Déterminer ensuite la solution dont la courbe passe par le point $A(0, 3)$.
3. $y' - 2y = 5 \sin x$, avec $h(x) = a \cos x + b \sin x$.
4. $y' + y = (2x + 3)e^x$, avec $h(x) = (ax + b)e^x$.

Exercice 39 Un problème complet ★★

corrigé p. 59

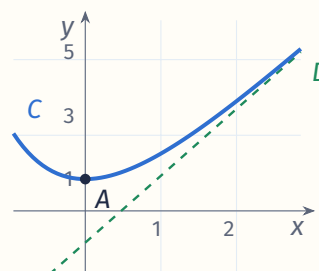
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = xe^{-x}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $h : x \mapsto (ax^2 + bx)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Résoudre (E), puis déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
4. Dans la suite, $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x}$ et C_f est sa courbe dans un repère orthonormé.
 - a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
 - b) En utilisant (E), montrer que $f'(x) = -\frac{1}{2}[(x-1)^2 + 1]e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f .
 - c) Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2e^{-x}$. La courbe C_f admet-elle un point d'inflexion ?
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Exercice 40 Remonter au second membre ★★

corrigé p. 60

1. Les fonctions $f : x \mapsto e^{2x} + x$ et $g : x \mapsto 3e^{2x} + x$ sont deux solutions d'une même équation (E) : $y' = ay + \varphi(x)$, où a est un réel et φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
 - a) Montrer que $g - f$ est solution de l'équation $y' = ay$, et en déduire a .
 - b) Déterminer $\varphi(x)$, puis résoudre (E).
2. Déterminer les réels a, b, c tels que les solutions de l'équation $y' + ay = bx + c$ soient exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x} + 3x - 1$ ($C \in \mathbb{R}$).
3. Soient a et b deux réels et (F) : $y' + y = ax + b$.
 - a) Montrer que la fonction affine $p : x \mapsto ax + b - a$ est solution de (F), puis résoudre (F).
 - b) La courbe C ci-contre est celle d'une solution f de (F) : elle passe par le point $A(0, 1)$ et admet la droite $D : y = 2x - 1$ pour asymptote en $+\infty$. Déterminer a, b et $f(x)$.
 - c) Justifier que la tangente à C en A est horizontale.



Exercice 41 La méthode du facteur $e^{-\alpha x}$ ★★★

corrigé p. 60

Soient α un réel, I un intervalle et φ une fonction définie sur I .

1. Soit f une fonction dérivable sur I et z la fonction définie sur I par $z(x) = f(x)e^{-\alpha x}$. Montrer que $z'(x) = (f'(x) - \alpha f(x))e^{-\alpha x}$, puis que :

$$f \text{ est solution de } y' - \alpha y = \varphi(x) \text{ sur } I \iff z'(x) = \varphi(x)e^{-\alpha x} \text{ pour tout } x \in I.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$, puis donner sa solution nulle en 0.
3. Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation $y' + y = \frac{e^{-x}}{x+1}$. Déterminer sa solution f telle que $f(0) = 1$, puis les limites de f en -1 à droite et en $+\infty$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y' - y = e^x \cos x$. Quelles sont ses solutions positives sur $\mathbb{R}$?

Exercice 42 Superposition et régime permanent ★★★

corrigé p. 61

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4 \sin^2 x$.

1. Montrer que $4 \sin^2 x = 2 - 2 \cos 2x$ pour tout réel x .
2. a) Déterminer une solution constante h_1 de l'équation (E_1) : $y' + 2y = 2$.
b) Déterminer une solution h_2 de l'équation (E_2) : $y' + 2y = -2 \cos 2x$ de la forme $h_2(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$.
3. Montrer que $h = h_1 + h_2$ est solution de (E), puis résoudre (E).
4. a) Montrer que $h(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire que h est périodique de période π , et déterminer les valeurs minimale et maximale de h .
b) Montrer que h est la seule solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - h(x))$ et interpréter.

19

Équations du second ordre

Pour (E) : $y'' + ay' + by = 0$, on résout l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$: si $\Delta > 0$, $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$; si $\Delta = 0$, $y = (C_1 x + C_2) e^{r x}$; si $\Delta < 0$ (racines $p \pm iq$), $y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$. Les conditions $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ fixent une unique solution.

Exercice 43 Reconnaître le cas ★

corrigé p. 62

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

d) $y'' - 2y' = 0$

g) $y'' + 10y' + 25y = 0$

b) $y'' + y' - 2y = 0$

e) $4y'' - y = 0$

h) $y'' - 2y' + 5y = 0$

c) $2y'' - 3y' + y = 0$

f) $y'' = 2y' - y$

i) $y'' + 6y' + 13y = 0$

2. Parmi ces neuf équations, lesquelles ont **toutes** leurs solutions de limite nulle en $+\infty$?

Exercice 44 Conditions initiales ★

corrigé p. 62

Déterminer la solution f de chaque équation qui vérifie les conditions indiquées.

- | | |
|--|--|
| a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$; | e) $y'' + y' = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$; |
| b) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$; | |
| c) $y'' - 4y' + 8y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$; | f) $y'' - 5y' + 4y = 0$, la courbe de f passant par $A(0, 2)$ avec une tangente en A parallèle à la droite $y = 5x$. |
| d) $y'' - y = 0$, $f(0) = 1$, $f(\ln 2) = \frac{5}{4}$; | |

Exercice 45 Une étude complète ★★

corrigé p. 63

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

1. Résoudre (E), puis montrer que la solution f de (E) telle que $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$ est $f(x) = e^{3x} - 3e^x$; on note C_f sa courbe.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = 3e^x(e^{2x} - 1)$, dresser le tableau de variations de f et en déduire que $f(x) \geq -2$ pour tout réel x .
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$.
5. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I , dont on donnera les coordonnées exactes.
6. Tracer C_f , puis discuter, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 46 Raisonner sur les solutions ★★

corrigé p. 64

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 6y = 0$.

1. Résoudre (E).
2. Soit f une solution de (E). Montrer, sans utiliser la question 1, que f' et la fonction $x \mapsto f(x+1)$ sont aussi des solutions de (E).
3. Déterminer les solutions f de (E) telles que :

a) f est bornée sur $[0, +\infty[$;	d) $f' = 2f$;
b) f a une limite finie en $-\infty$;	e) $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{-2x} = 1$.
c) f est bornée sur $\mathbb{R}$;	
4. Soit f une solution de (E). Montrer que $g : x \mapsto f(-x)$ est solution de (E') : $y'' - y' - 6y = 0$, puis en déduire, sans calcul, que la seule solution paire de (E) est la fonction nulle.

Exercice 47 Second ordre avec second membre ★★

corrigé p. 64

Comme au premier ordre, si h est solution de (E) : $y'' + ay' + by = g(x)$: f solution de (E) $\iff f - h$ solution de (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$.

1. On considère (E_1) : $y'' + y' - 2y = -2x + 3$.
 - a) Déterminer une solution h de (E_1) de la forme $h(x) = ax + b$.
 - b) Démontrer l'équivalence rappelée ci-dessus pour (E_1) , puis résoudre (E_1) .

- c) Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
2. On considère $(E_2) : y'' + 4y' + 3y = 8e^x$. Déterminer une solution de (E_2) de la forme $x \mapsto ae^x$, puis résoudre (E_2) . Quelle est la solution f de (E_2) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$?
3. On considère $(E_3) : y'' + 2y' + y = 2 \cos x$.
- a) Déterminer une solution de (E_3) de la forme $x \mapsto a \cos x + b \sin x$, puis résoudre (E_3) .
- b) Montrer que, pour toute solution f de $(E_3) : \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sin x) = 0$. Interpréter.

Exercice 48 Démontrer le théorème quand $\Delta \geq 0$ ★★★

corrigé p. 65

Soient a, b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$, r_1 et r_2 les racines (éventuellement égales) de $r^2 + ar + b = 0$ (donc $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$), et $(E) : y'' + ay' + by = 0$. On n'utilise que les résultats du premier ordre.

- Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g = f' - r_1 f$. Montrer que $g' - r_2 g = f'' + af' + bf$.
- En déduire que f est solution de (E) si et seulement s'il existe un réel K tel que, pour tout réel $x : f'(x) - r_1 f(x) = Ke^{r_2 x}$.
- Cas $r_1 \neq r_2$.** Vérifier que $x \mapsto \frac{K}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}$ est une solution de l'équation $y' - r_1 y = Ke^{r_2 x}$, puis en déduire que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).
- Cas $r_1 = r_2 = r$.** Avec $z(x) = f(x) e^{-rx}$, montrer que $f' - rf = Ke^{rx} \iff z' = K$, puis que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{rx}$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).
- Application.** Par la même démarche, trouver f, g dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f + g$, $g' = g$, $f(0) = 1$, $g(0) = 2$.

20

Oscillations ($\Delta < 0$)

Quand l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a deux racines complexes conjuguées $p \pm iq$ ($q > 0$), les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$: elles oscillent. Oscillations libres ($p = 0$), amorties ($p < 0$), ou forcées par un second membre.

Exercice 49 Racines complexes conjuguées ★

corrigé p. 65

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $9y'' + y = 0$	b) $2y'' + 3y = 0$	c) $y'' - 6y' + 10y = 0$
d) $y'' + y' + y = 0$	e) $4y'' + 4y' + 5y = 0$	f) $y'' = 4y' - 13y$
- Déterminer la solution f de l'équation c) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, puis la solution g de l'équation d) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = \sqrt{3}$.

Exercice 50 La forme $R \cos(\omega x + \varphi)$ ★

corrigé p. 66

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 16y = 0$.

- Résoudre (E) , puis déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 4$.
- Écrire $f(x)$ sous la forme $R \cos(4x + \varphi)$, avec $R > 0$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$. En déduire l'amplitude et la période de f , ainsi que les réels de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en lesquels f atteint son maximum.

- Résoudre dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.
- Inversement, soit $g(x) = 3 \cos\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$. Vérifier que g est solution de (E), écrire $g(x)$ sous la forme $A \cos 4x + B \sin 4x$, puis calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 51 Une oscillation amortie ★★

corrigé p. 66

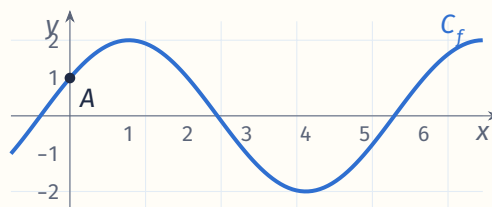
On considère l'équation (E) : $y'' + 2y' + 10y = 0$, et les courbes $\Gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\Gamma_2 : y = -e^{-x}$.

- Résoudre (E), puis déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$. Donner une équation de la tangente à sa courbe C_f à l'origine.
- Montrer que $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ pour tout réel x , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Résoudre dans $[0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$, $f(x) = e^{-x}$ et $f(x) = -e^{-x}$. Interpréter graphiquement.
- Montrer que $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = e^{-\frac{2\pi}{3}} f(x)$ pour tout réel x , et interpréter ce résultat ($e^{-\frac{2\pi}{3}} \approx 0,12$).
- Représenter Γ_1 , Γ_2 et C_f sur $[0, \pi]$.

Exercice 52 Lire une solution sur un graphique ★★

corrigé p. 67

La courbe C_f ci-contre est celle d'une solution f d'une équation (E) : $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega > 0$. Elle passe par le point $A(0, 1)$; f admet un maximum égal à 2 en $x = 1$, puis un minimum égal à -2 en $x = 4$.



- Lire la période T de f ; en déduire ω , puis l'équation (E).
- On écrit $f(x) = R \cos(\omega x + \varphi)$, avec $R > 0$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Déterminer R et φ , puis écrire $f(x)$ sous la forme $A \cos \omega x + B \sin \omega x$.
- Calculer $f'(0)$ et donner une équation de la tangente à C_f en A.
- Résoudre dans $[0, 6]$ l'équation $f(x) = 1$, et vérifier sur la figure.
- Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f .
- Déterminer la solution h de (E) telle que $h(0) = 0$ et $h(1) = \sqrt{3}$. Montrer que $f(x) = h\left(x + \frac{1}{2}\right)$ pour tout réel x et interpréter graphiquement.

Exercice 53 Le changement de fonction $z = y e^{-px}$ ★★★

corrigé p. 68

Partie A : d'où vient la forme $e^{px}(\dots)$? Soient a et b deux réels tels que $\Delta = a^2 - 4b < 0$, et $p \pm iq$ ($q > 0$) les racines de $r^2 + ar + b = 0$. À toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction z définie par $z(x) = f(x) e^{-px}$.

- Montrer que $a = -2p$ et $b = p^2 + q^2$. Exprimer f' et f'' à l'aide de z , z' et z'' , puis montrer que

$$f'' + af' + bf = (z'' + q^2 z) e^{px}.$$

- En déduire, à l'aide du cours sur l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$.
- On suppose maintenant $\Delta = 0$ et on pose $p = -\frac{a}{2}$. Que devient l'égalité de la question 1 ? Retrouver les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ dans ce cas.

Partie B : un second membre « résonant ». On considère (E) : $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cos x$.

- Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z(x) = f(x) e^{2x}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $z'' + z = \cos x$.

- Vérifier que $u : x \mapsto \frac{x}{2} \sin x$ vérifie $u'' + u = \cos x$. Résoudre l'équation $z'' + z = \cos x$, puis l'équation (E).
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $|f(x)| \leq \frac{1}{4e}$ pour tout $x \geq 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 54 Courbe de résonance ★★★

corrigé p. 68

Un oscillateur amorti est excité par un signal de pulsation $\omega > 0$. On considère l'équation

$$(E_\omega) : y'' + 4y' + 20y = 16 \cos(\omega x).$$

- Résoudre l'équation (H) : $y'' + 4y' + 20y = 0$ et montrer que toutes ses solutions tendent vers 0 en $+\infty$.
- Soient α, β réels et $p(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$. Montrer que p est solution de (E_ω) si et seulement si

$$(20 - \omega^2)\alpha + 4\omega\beta = 16 \quad \text{et} \quad -4\omega\alpha + (20 - \omega^2)\beta = 0.$$

En déduire que $\alpha = \frac{16(20 - \omega^2)}{D(\omega)}$ et $\beta = \frac{64\omega}{D(\omega)}$, où $D(\omega) = (20 - \omega^2)^2 + 16\omega^2$.

- Montrer que toute solution f de (E_ω) vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - p(x)) = 0$: c'est le **régime permanent**.
- Calculer $\alpha^2 + \beta^2$. En déduire qu'il existe un réel φ tel que $p(x) = A(\omega) \cos(\omega x - \varphi)$, où $A(\omega) = \frac{16}{\sqrt{D(\omega)}}$ est l'amplitude du régime permanent.
- Vérifier que $D(\omega) = (\omega^2 - 12)^2 + 256$. Étudier les variations de A sur $]0, +\infty[$ et ses limites en 0 et en $+\infty$. Pour quelle pulsation ω_r l'amplitude est-elle maximale (**résonance**) ? Comparer ω_r à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{20}$ de l'oscillateur sans frottement $y'' + 20y = 0$.
- Pour $\omega = \omega_r$, écrire $p(x)$ sous la forme $A \cos(\omega_r x - \varphi)$.

21

Modélisation (physique, chimie)

Une loi de la physique, de la chimie ou de la biologie se traduit par une équation différentielle : on la résout, puis on **interprète** les résultats, avec leurs unités.

Exercice 55 Le courant dans une bobine ★

corrigé p. 69

Un circuit comporte, en série, un générateur de tension constante $E = 12$ V, une bobine (de résistance négligeable) d'inductance $L = 0,2$ H et un conducteur ohmique de résistance $R = 40$ Ω . On ferme le circuit à l'instant $t = 0$ (t en s). L'intensité $i(t)$ (en A) vérifie $L i'(t) + R i(t) = E$ et $i(0) = 0$.

- Calculer la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$, puis écrire l'équation sous la forme $i' = a i + b$.
- Déterminer $i(t)$ pour $t \geq 0$, puis $I_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$. Comparer I_∞ à $\frac{E}{R}$.
- Au bout de combien de temps l'intensité atteint-elle 95 % de I_∞ ? Exprimer cette durée à l'aide de τ .
- La tension aux bornes de la bobine est $u_L(t) = L i'(t)$. Calculer $u_L(t)$, puis $u_L(0)$, $u_L(\tau)$ et la limite de u_L en $+\infty$.

Exercice 56 Une réaction d'ordre 1 ★

corrigé p. 70

On étudie la décomposition de l'eau oxygénée : $2 \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$. La concentration $c(t)$ de H_2O_2 (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, t en min) vérifie $c'(t) = -k c(t)$, où $k > 0$ est la constante de vitesse. Au départ, $c(0) = c_0 = 0,060 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; une mesure donne $c(10) = 0,045 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Exprimer $c(t)$ en fonction de c_0 , k et t . Déterminer la valeur exacte de k , puis une valeur approchée (avec son unité).
2. Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle $c = \frac{c_0}{2}$. Montrer que $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ et le calculer.
3. Au bout de combien de temps 90 % de l'eau oxygénée initiale a-t-elle été décomposée ?
4. La vitesse de disparition est $v(t) = -c'(t)$. Calculer $v(0)$, et montrer que $v\left(t + t_{1/2}\right) = \frac{1}{2} v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
5. La concentration du dioxygène formé est $\frac{1}{2}(c_0 - c(t))$. Vers quelle valeur tend-elle ?

Exercice 57 Perfusion d'un médicament ★★

corrigé p. 70

Un patient reçoit un médicament par perfusion intraveineuse, au débit constant de $4 \text{ mg} \cdot \text{h}^{-1}$. L'organisme l'élimine à une vitesse proportionnelle à la quantité présente : la quantité $Q(t)$ (en mg) de médicament dans le sang à l'instant t (en h) vérifie $Q'(t) = 4 - 0,2 Q(t)$.

1. Au début de la perfusion ($t = 0$), le sang ne contient pas de médicament. Déterminer $Q(t)$ et sa limite Q_∞ (le « plateau »). Au bout de combien de temps $Q(t)$ dépasse-t-elle 90 % de Q_∞ ?
2. Le médicament est efficace lorsque $Q(t) \geq 12 \text{ mg}$ et toxique au-delà de 25 mg . Au bout de combien de temps devient-il efficace ?
3. Pour agir plus vite, le médecin injecte à $t = 0$ une dose Q_0 (en mg), puis lance la même perfusion. Exprimer $Q(t)$ en fonction de Q_0 . Montrer que si $12 \leq Q_0 \leq 25$, le médicament est efficace dès $t = 0$ et n'est jamais toxique. Que se passe-t-il si $Q_0 = 20$?
4. Avec $Q_0 = 20$, on arrête la perfusion à l'instant $t = 24$: alors $Q' = -0,2 Q$. Pendant combien de temps le médicament reste-t-il efficace après l'arrêt ?

Exercice 58 Un ressort amorti ★★

corrigé p. 70

Un solide de masse $m = 0,5 \text{ kg}$, accroché à un ressort horizontal de raideur $k = 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, subit une force de frottement $-h x'(t)$, avec $h \geq 0$ (en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) ; $x(t)$ (en m) est sa position par rapport à l'équilibre à l'instant t (en s). La deuxième loi de Newton donne $m x'' + h x' + k x = 0$.

1. Sans frottement ($h = 0$) : montrer que $x'' + 50x = 0$; donner la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 .
2. Montrer que le mouvement est oscillant (cas $\Delta < 0$) si et seulement si $h < 5\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. Dans la suite, $h = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. À $t = 0$, on lance le solide depuis sa position d'équilibre avec la vitesse $x'(0) = 0,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer $x(t)$.
4. Soit $T = \frac{2\pi}{7}$ (la pseudo-période). Montrer que $x(t + T) = e^{-T} x(t)$ et interpréter.
5. Montrer que $|x(t)| \leq 0,05 e^{-t}$. À partir de quel instant est-on sûr que $|x(t)| \leq 1 \text{ mm}$?

Exercice 59 Filiation radioactive ★★★

corrigé p. 71

Un noyau radioactif X se désintègre en un noyau Y , lui-même radioactif, qui donne un noyau stable. On note $N_X(t)$ et $N_Y(t)$ les nombres de noyaux X et Y à l'instant t (en jours), et $\lambda_X = 0,1 \text{ j}^{-1}$, $\lambda_Y = 0,3 \text{ j}^{-1}$ leurs constantes radioactives :

$$N'_X = -\lambda_X N_X, \quad N'_Y = \lambda_X N_X - \lambda_Y N_Y, \quad N_X(0) = N_0 > 0, \quad N_Y(0) = 0.$$

1. Déterminer $N_X(t)$ et la demi-vie de X .
2. Vérifier que N_Y est solution de (E) : $y' + 0,3y = 0,1N_0 e^{-0,1t}$. Déterminer le réel c tel que $t \mapsto c e^{-0,1t}$ soit solution de (E), puis résoudre (E) et montrer que $N_Y(t) = \frac{N_0}{2} (e^{-0,1t} - e^{-0,3t})$.
3. Étudier les variations de N_Y sur $[0, +\infty[$. Montrer que N_Y est maximal à l'instant $t_m = 5 \ln 3$ et que $N_Y(t_m) = \frac{N_0}{3\sqrt{3}}$.
4. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_Y(t)}{N_X(t)}$ et interpréter.
5. On suppose ici que X et Y ont la même constante $\lambda > 0$: $N'_Y = \lambda N_X - \lambda N_Y$. Montrer qu'aucune fonction $t \mapsto c e^{-\lambda t}$ ne convient, chercher une solution de la forme $t \mapsto a t e^{-\lambda t}$, puis déterminer $N_Y(t)$ et son maximum.

Exercice 60 Une maison au rythme du jour ★★★

corrigé p. 71

En hiver, la température extérieure (en °C) à l'instant t (en h) est $T_e(t) = 10 + 5 \cos(\omega t)$, avec $\omega = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \cdot \text{h}^{-1}$. Le chauffage d'une maison tombe en panne à $t = 0$, alors qu'il y fait 20 °C. D'après la loi de Newton, la température intérieure $\theta(t)$ vérifie (E) : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - T_e(t))$, avec ici $k = \frac{\pi}{12} \text{ h}^{-1}$.

1. Donner la période et les valeurs extrêmes de T_e .
2. Déterminer les réels α et β tels que $\theta_p(t) = 10 + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ soit solution de (E).
3. Montrer que θ est solution de (E) si et seulement si $\theta - \theta_p$ est solution de $y' = -ky$. En déduire $\theta(t)$.
4. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) - \theta_p(t)) = 0$, et déterminer l'instant à partir duquel $|\theta(t) - \theta_p(t)| \leq 0,5$ °C. Écrire $\theta_p(t) = 10 + R \cos(\omega t - \varphi)$: entre quelles températures la maison oscille-t-elle, et avec quel retard sur l'extérieur ?
5. *Isolation.* Pour $k > 0$ quelconque, la solution de la forme $10 + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ a pour amplitude $A(k) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Montrer que $A(k) = \frac{5k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$, étudier les variations de A sur $]0, +\infty[$ et interpréter (une maison mieux isolée a un k plus petit).

22

Défis de concours

Six défis : équations fonctionnelles, changements de fonction, systèmes, inégalités. Ils demandent de l'initiative et une rédaction rigoureuse.

Exercice 61 L'équation fonctionnelle de d'Alembert ★★★

corrigé p. 72

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que

$$(D) : \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{pour tous réels } x \text{ et } y.$$

1. Montrer que $f(0) = 1$, que f est paire, puis que $f'(0) = 0$.
2. En fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y , montrer que $f'' = kf$, où $k = f''(0)$.
3. En déduire f , en distinguant les cas $k < 0$ (poser $k = -\omega^2$, $\omega > 0$), $k = 0$ et $k > 0$ (poser $k = \omega^2$).
4. Vérifier que les fonctions obtenues sont solutions de (D). Lesquelles sont bornées ? Lesquelles s'annulent en 1 ?
5. Déterminer de même les fonctions g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)$ pour tous réels x, y .

Exercice 62 Stabilité d'un oscillateur ★★★★★

corrigé p. 73

Soient a, b réels et $(E) : y'' + ay' + by = 0$. On dit que (E) est **stable** si toutes ses solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

1. On suppose $\Delta = a^2 - 4b > 0$, et on note $r_1 < r_2$ les racines de $r^2 + ar + b = 0$. Montrer que (E) est stable si et seulement si $r_2 < 0$, puis si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
2. Montrer que, si $\Delta = 0$ ou si $\Delta < 0$, (E) est stable si et seulement si $a > 0$ (si $\Delta < 0$, de racines $p \pm iq$, et si $a \leq 0$, on pourra utiliser les réels $\frac{2n\pi}{q}$).
3. Conclure : (E) est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$. Pour quels réels m l'équation $y'' + (m-1)y' + (4-m^2)y = 0$ est-elle stable ?
4. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$ et $b > 0$.

Exercice 63 Trouver le bon changement de fonction ★★★★★

corrigé p. 74

On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$. Pour un réel α et une fonction f deux fois dérivable sur I , on pose $g(x) = x^\alpha f(x)$.

1. On cherche α tel que $g'' + g = x^{\alpha-1}(xf'' + 2f' + xf)$ pour **toute** fonction f . En testant $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$, montrer que nécessairement $\alpha = 1$; vérifier ensuite que $\alpha = 1$ convient.
2. Résoudre (E) sur I , puis déterminer les solutions de (E) qui ont une limite finie en 0, et cette limite.
3. Résoudre de même $(F) : xy'' + 2y' - xy = 0$ sur I . Quelles sont les solutions de (F) qui ont une limite finie en 0 ? Quelles sont celles qui sont bornées sur I ?

Exercice 64 Deux oscillateurs couplés ★★★★★

corrigé p. 74

Deux solides reliés par des ressorts ont pour positions $x(t)$ et $y(t)$, avec

$$x'' = -2x + y, \quad y'' = x - 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = y'(0) = 0.$$

1. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer que $u'' + u = 0$ et $v'' + 3v = 0$. En déduire u et v , puis x et y .
2. Montrer que $x(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}t\right)$ et interpréter (phénomène de **battements**).
3. Montrer, par l'absurde, que x n'est pas périodique (on utilisera $x(T) = x(0)$ et l'irrationalité de $\sqrt{3}$, que l'on démontrera).
4. Déterminer la solution du système lorsque $x(0) = y(0) = 1$, puis lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$ (toujours avec $x'(0) = y'(0) = 0$). Montrer qu'elles sont périodiques : ce sont les **modes propres**.

Exercice 65 Inégalités différentielles ★★★★★

corrigé p. 75

Partie A. Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.

1. On suppose que $f'(x) + f(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$. En étudiant $x \mapsto e^x f(x)$, montrer que $f(x) \leq f(0)e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.
2. On suppose que $f(0) = 1$ et $|f'(x) + 2f(x)| \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$. En étudiant $x \mapsto e^{2x}f(x) - e^x$ et $x \mapsto e^{2x}f(x) + e^x$, montrer que $2e^{-2x} - e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Limite de f en $+\infty$?

Partie B. On suppose seulement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$, ce qui se traduit ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geq 0$ tel que $|f'(x) + f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq A$.

3. Soient $\varepsilon > 0$ et A associé. En étudiant $x \mapsto e^x(f(x) - \varepsilon)$ et $x \mapsto e^x(f(x) + \varepsilon)$, montrer que $|f(x)| \leq |f(A)|e^{A-x} + \varepsilon$ pour tout $x \geq A$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. Montrer par des contre-exemples que : a) le résultat devient faux si l'on remplace $f' + f$ par $f' - f$; b) la réciproque est fautive (étudier $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{1+x}$).

Exercice 66 Une équation du troisième ordre ★★★*corrigé p. 75*

On cherche les fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que (E) : $f''' = f$.

1. On pose $g = f'' + f' + f$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g' = g$. En déduire que f est solution de (E) si et seulement s'il existe un réel C tel que $f'' + f' + f = Ce^x$.
2. Vérifier que $x \mapsto \frac{C}{3}e^x$ est solution de $y'' + y' + y = Ce^x$, puis résoudre (E).
3. Déterminer les solutions de (E) bornées sur $[0, +\infty[$, puis la solution φ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.
4. Soient u, v, w dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $u' = v, v' = w, w' = u, u(0) = 1$ et $v(0) = w(0) = 0$.
 - a) Montrer que $u = \varphi$, et que $u + v + w = e^x$.
 - b) Soit $S = u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu$. Montrer que $S' = -S$, puis que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$ pour tout réel x (développer $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$).

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

23 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

- a) $f'(x) = -6e^{-2x}$, donc $f'(x) + 2f(x) = -6e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$: f est solution.
b) $g'(x) = 3e^{-3x}$ et $-3g(x) + 6 = -6 + 3e^{-3x} + 6 = 3e^{-3x} = g'(x)$: g est solution.
c) $h'(x) = -6 \sin 3x - 3 \cos 3x$ et $h''(x) = -18 \cos 3x + 9 \sin 3x = -9h(x)$, donc $h'' + 9h = 0$: h est solution.
d) $k'(x) = (x+1)e^x$ et $k''(x) = (x+2)e^x$, donc $k'' - 2k' + k = [(x+2) - 2(x+1) + x]e^x = 0$: k est solution.
- $u'(x) = e^x$ alors que $u(x) + 1 = e^x + 2 \neq e^x$: u n'est pas solution. $v'(x) = e^x = (e^x - 1) + 1 = v(x) + 1$: v est solution.
- Avec $y = e^{mx}$: $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$, donc $y'' - y' - 6y = (m^2 - m - 6)e^{mx}$. Comme $e^{mx} > 0$, la fonction est solution si et seulement si $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$, soit $m = 3$ ou $m = -2$.

■ Corrigé de l'exercice 2

On utilise le théorème : les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

- a) $y = Ce^{5x}$ b) $2y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{2}y$: $y = Ce^{-x/2}$ c) $3y' - 2y = 0 \iff y' = \frac{2}{3}y$: $y = Ce^{2x/3}$ ($C \in \mathbb{R}$).
- $f(x) = Ce^{3x}$ et $f(\ln 2) = Ce^{3 \ln 2} = 8C = 16$, donc $C = 2$: $f(x) = 2e^{3x}$.
- $g(x) = Ce^{-x/2}$ et $g(2) = Ce^{-1} = e$, donc $C = e^2$: $g(x) = e^{2-\frac{x}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 3

On écrit chaque équation sous la forme $y' = ay + b$; les solutions sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ($C \in \mathbb{R}$).

- a) $a = 2, b = -6$: $y = Ce^{2x} + 3$. b) $y' = -3y + 12$: $y = Ce^{-3x} + 4$.
c) $y' = \frac{1}{2}y + 2$: $-\frac{b}{a} = -4$, $y = Ce^{x/2} - 4$. d) $y' = -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}$: $-\frac{b}{a} = -2$, $y = Ce^{-x/4} - 2$.
- La solution constante est $-\frac{b}{a}$ (cas $C = 0$) : a) 3 b) 4 c) -4 d) -2.
Vérification pour b) : $y = 4$ donne $y' + 3y = 0 + 12 = 12$ ✓.

3. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (Ce^{-3x} + 4) = 4$ pour tout C : toutes les solutions tendent vers 4.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$: la solution tend vers $+\infty$ si $C > 0$, vers $-\infty$ si $C < 0$, et vaut 3 si $C = 0$. **Ce n'est pas vrai** pour a).

Remarque. Si $a < 0$, toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers la solution constante $-\frac{b}{a}$ en $+\infty$: c'est un état d'équilibre « stable ».

■ Corrigé de l'exercice 4

On écrit d'abord la solution générale, **puis** on utilise la condition.

a) $y = Ce^{-2x} + 2$; $f(0) = C + 2 = 5$, donc $C = 3$: $f(x) = 3e^{-2x} + 2$.

b) $y' = 3y + 6$: $y = Ce^{3x} - 2$; $f(1) = Ce^3 - 2 = 0$, donc $C = 2e^{-3}$: $f(x) = 2e^{3x-3} - 2$.

c) $y' = -y + 3$: $y = Ce^{-x} + 3$; $f(\ln 2) = \frac{C}{2} + 3 = 1$, donc $C = -4$: $f(x) = 3 - 4e^{-x}$.

d) $y = Ce^x - 2$, donc $f'(x) = Ce^x$ et $f'(0) = C = 3$: $f(x) = 3e^x - 2$ (ou : $f'(0) = f(0) + 2$ donne $f(0) = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 5

1. a) $p'(x) + 3p(x) = a + 3ax + 3b = 3ax + (a + 3b)$. Par identification avec $6x + 5$: $3a = 6$ et $a + 3b = 5$, donc $a = 2$, $b = 1$: $p(x) = 2x + 1$.

b) $(g-p)' + 3(g-p) = (g' + 3g) - (p' + 3p) = g' + 3g - (6x + 5)$. Donc $g' + 3g = 6x + 5 \iff (g-p)' + 3(g-p) = 0$.

c) Les solutions de (E_0) : $y' = -3y$ sont $x \mapsto Ce^{-3x}$. D'après b), g est solution de (E_1) si et seulement si $g(x) - p(x) = Ce^{-3x}$:

$$g(x) = Ce^{-3x} + 2x + 1, C \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(0) = C + 1 = 3 \iff C = 2 : g(x) = 2e^{-3x} + 2x + 1.$$

2. Avec $h(x) = ae^{-2x}$: $h'(x) - h(x) = -2ae^{-2x} - ae^{-2x} = -3ae^{-2x}$, égal à $3e^{-2x}$ si et seulement si $a = -1$.

Comme au 1., g est solution de (E_2) si et seulement si $g - h$ est solution de $y' = y$, d'où $y = Ce^x - e^{-2x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

■ Corrigé de l'exercice 6

On écrit l'équation caractéristique et on applique le théorème des trois cas.

a) $r^2 - 3r + 2 = 0$: $\Delta = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

b) $r^2 + 3r = r(r + 3) = 0$: $r_1 = 0$, $r_2 = -3$: $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$ (car $e^{0x} = 1$).

c) $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2$: racine double 3 : $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$.

d) $4r^2 + 4r + 1 = (2r + 1)^2$: racine double $-\frac{1}{2}$: $y = (C_1 x + C_2) e^{-x/2}$.

e) $r^2 + 2r + 5 = 0$: $\Delta = -16 < 0$, $r = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ ($p = -1$, $q = 2$) : $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

f) $r^2 + 16 = 0$: $r = \pm 4i$ ($p = 0$, $q = 4$) : $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

■ Corrigé de l'exercice 7

a) $r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1)$: $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ et $f'(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$.

$f(0) = C_1 + C_2 = 0$ et $f'(0) = 2C_1 - C_2 = 3$, donc $C_1 = 1$, $C_2 = -1$: $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.

b) $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$: $f(x) = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$ et $f'(x) = (C_1 - 2C_2 - 2C_1 x) e^{-2x}$.

$f(0) = C_2 = 1$ et $f'(0) = C_1 - 2C_2 = 0$, donc $C_1 = 2$: $f(x) = (2x + 1) e^{-2x}$.

c) $r^2 - 2r + 2 = 0$: $\Delta = -4$, $r = 1 \pm i$: $f(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $f'(x) = e^x [(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x]$.

$f(0) = C_1 = 1$ et $f'(0) = C_1 + C_2 = 3$, donc $C_2 = 2$: $f(x) = e^x (\cos x + 2 \sin x)$.

■ Corrigé de l'exercice 8

1. (E) $\iff y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0$: c'est $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \frac{\pi}{2}$. Les solutions sont $y = A \cos \frac{\pi x}{2} + B \sin \frac{\pi x}{2}$.

$f(0) = A = 1$; $f'(x) = \frac{\pi}{2} (-A \sin \frac{\pi x}{2} + B \cos \frac{\pi x}{2})$, donc $f'(0) = \frac{\pi}{2} B = \frac{\pi}{2}$ et $B = 1$:

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2}.$$

2. $\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} = f(x)$.

Amplitude : $\sqrt{2}$; période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4$.

3. $f(x) = 0 \iff \frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{3}{2} + 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans $[0, 4]$: $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{7}{2}$.

Le maximum de f est $\sqrt{2}$, atteint lorsque $\cos \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$, soit $\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$: $x = \frac{1}{2} + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

24 Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

1. $N' = -\lambda N$: $N(t) = C e^{-\lambda t}$, et $N(0) = C = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

2. $N(T) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \iff -\lambda T = -\ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (indépendante de N_0).

Puis $N(t + T) = N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = N(t) \times \frac{1}{2}$: toutes les T années, le nombre de noyaux est divisé par 2.

3. $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$. Puis $N(t) = 0,3 N_0 \iff e^{-\lambda t} = 0,3 \iff t = \frac{\ln \frac{10}{3}}{\lambda} = 5730 \times \frac{\ln \frac{10}{3}}{\ln 2} \approx 9950 \text{ ans}$.

4. D'après 2., $N(nT) = \frac{N_0}{2^n}$ (réurrence). Or $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \iff 2^n > 100 \iff n \geq 7$ ($2^6 = 64$, $2^7 = 128$) : il reste moins de 1 % des noyaux au bout de 7 demi-vies, soit environ 40 000 ans.

■ Corrigé de l'exercice 10

- $\tau = RC = 10^{-4} \times 10^{-4} = \boxed{1 \text{ s}}$. En divisant par τ : $u' = -\frac{1}{\tau}u + \frac{E}{\tau}$, soit $\boxed{u' = -u + 6}$ ($a = -1$, $b = 6$).
- $u(t) = Ke^{-t} + 6$ ($K \in \mathbb{R}$) et $u(0) = K + 6 = 0$: $\boxed{u(t) = 6(1 - e^{-t})}$, c'est-à-dire $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 6 = E$: le condensateur finit par être chargé sous la tension E du générateur (régime permanent).
- $u'(t) = 6e^{-t}$, $u'(0) = 6$ et $u(0) = 0$: la tangente à l'origine a pour équation $u = 6t$. Elle coupe la droite $u = 6$ en $t = 1 = \tau$.
- $u(t) = 0,99E \iff e^{-t} = 0,01 \iff t = \ln 100 \approx \boxed{4,6 \text{ s}}$ (environ 5τ : c'est la règle utilisée en physique).
- $i(t) = C u'(t) = 10^{-4} \times 6e^{-t} = \boxed{6 \times 10^{-4} e^{-t} \text{ A}}$, donc $i(0) = 6 \times 10^{-4} \text{ A} = 0,6 \text{ mA}$. Comme $\frac{E}{R} = \frac{6}{10^4}$:
 $\boxed{i(0) = \frac{E}{R}}$.

■ Corrigé de l'exercice 11

Partie I.

- $u'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$, donc $u'(x) + u(x) = 2e^{-x}$: u est solution de (E).
- $(g - u)' + (g - u) = (g' + g) - (u' + u) = g' + g - 2e^{-x}$: cette quantité est nulle si et seulement si $g' + g = 2e^{-x}$.
- (E_0) : $y' = -y$ a pour solutions $x \mapsto Ce^{-x}$. Donc les solutions de (E) sont $\boxed{x \mapsto (2x + C)e^{-x}}$, $C \in \mathbb{R}$.
 $f(0) = C = 1$: $\boxed{f(x) = (2x + 1)e^{-x}}$.

Partie II.

- En $+\infty$: $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} \rightarrow 0$ (car $xe^{-x} \rightarrow 0$) : l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.
 En $-\infty$: $2x + 1 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

- f est solution de (E), donc $f'(x) = 2e^{-x} - f(x)$, soit

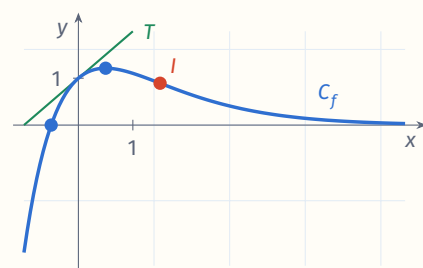
$$f'(x) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = \boxed{(1 - 2x)e^{-x}},$$

du signe de $1 - 2x$. Le maximum de f est $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$.

- $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$: $\boxed{T : y = x + 1}$.

- $f''(x) = -2e^{-x} - (1 - 2x)e^{-x} = \boxed{(2x - 3)e^{-x}}$.
 f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{3}{2}$, d'où le point d'inflexion $\boxed{I\left(\frac{3}{2}, 4e^{-3/2}\right)}$ ($4e^{-3/2} \approx 0,89$).
 C_f coupe (Ox) en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	0



■ Corrigé de l'exercice 12

Partie I.

1. Une constante k est solution si et seulement si $4k = 4$: la solution constante est $\boxed{1}$. Puis

$$(g-1)'' - 4(g-1)' + 4(g-1) = g'' - 4g' + 4g - 4, \quad \text{nul si et seulement si } g'' - 4g' + 4g = 4.$$

2. $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$: les solutions de (E_0) sont $(C_1x + C_2)e^{2x}$, celles de (E) sont $\boxed{1 + (C_1x + C_2)e^{2x}}$.

$$f(0) = 1 + C_2 = 2 \text{ donne } C_2 = 1; \quad f'(x) = (2C_1x + C_1 + 2C_2)e^{2x}, \text{ donc } f'(0) = C_1 + 2 = 0 \text{ et } C_1 = -2 :$$

$$\boxed{f(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}}.$$

Partie II.

1. En $-\infty$: $(1 - 2x)e^{2x} = e^{2x} - 2xe^{2x} \rightarrow 0$ (car $xe^{2x} \rightarrow 0$), donc $f(x) \rightarrow 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

En $+\infty$: $1 - 2x \rightarrow -\infty$ et $e^{2x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} - 2\right)e^{2x} \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .

2. $f'(x) = -2e^{2x} + 2(1 - 2x)e^{2x} = \boxed{-4xe^{2x}}$: f est croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, +\infty[$, de maximum $f(0) = 2$.

Donc $f(x) \leq 2$, soit $(1 - 2x)e^{2x} \leq 1$; pour $x < \frac{1}{2}$, on a

$$1 - 2x > 0, \text{ d'où } \boxed{e^{2x} \leq \frac{1}{1 - 2x}}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	1	2	$-\infty$

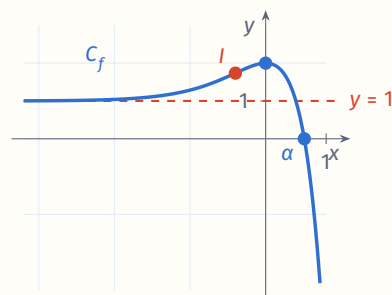
3. Sur $]-\infty, 0]$, f est strictement croissante de limite 1 en $-\infty$, donc $f(x) > 1 > 0$: pas de solution. Sur $[0, +\infty[$, f est continue, strictement décroissante, $f(0) = 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$: l'équation a

une unique solution α . Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - e^2 < 0$: $\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$ ($\alpha \approx 0,64$).

4. $f''(x) = -4e^{2x} - 8xe^{2x} = -4(1 + 2x)e^{2x}$ s'annule en changeant de signe en $-\frac{1}{2}$ (C_f est convexe avant, concave après) :

$$\boxed{I\left(-\frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{e}\right)} \quad \left(1 + \frac{2}{e} \approx 1,74\right).$$

La courbe reste au-dessus de son asymptote $y = 1$ sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et coupe l'axe des abscisses en α .



■ Corrigé de l'exercice 13

1. $p'(x) = -a \sin x + b \cos x$, donc $p'(x) - p(x) = (b-a) \cos x - (a+b) \sin x$. Pour que ce soit $-2 \sin x$ pour tout x , il faut $(x=0 \text{ et } x=\frac{\pi}{2})$ $b-a=0$ et $a+b=2$, et cela suffit : $a=b=1$, $\boxed{p(x) = \cos x + \sin x}$.

2. g est solution de (E) si et seulement si $g - p$ est solution de $y' = y$: $\boxed{y = Ce^x + \cos x + \sin x}$ ($C \in \mathbb{R}$).

3. $|\cos x + \sin x| \leq 2$. Si $C \neq 0$, $|Ce^x| \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, donc la solution n'est pas bornée ; si $C = 0$, elle est bornée. L'unique solution bornée est p , et

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = \cos x + \sin x : \quad \boxed{p(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

4. $f(0) = C + 1 = 0$, donc $C = -1$: $f(x) = \cos x + \sin x - e^x$. Alors $f(x) - p(x) = -e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$: C_f se rapproche de la sinusoïde de p .

■ Corrigé de l'exercice 14

1. $\theta' = -k\theta + 20k$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $-\frac{b}{a} = 20$: $\theta(t) = Ce^{-kt} + 20$, et $\theta(0) = C + 20 = 90$ donne $C = 70$: $\theta(t) = 20 + 70e^{-kt}$.
2. $\theta(10) = 55 \iff 70e^{-10k} = 35 \iff e^{-10k} = \frac{1}{2} \iff k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,069 \text{ min}^{-1}$.
- $\theta(20) = 20 + 70(e^{-10k})^2 = 20 + \frac{70}{4} = 37,5^\circ\text{C}$.
3. $\theta(t) = 30 \iff e^{-kt} = \frac{1}{7} \iff t = \frac{\ln 7}{k} = \frac{10 \ln 7}{\ln 2} \approx 28 \text{ min}$.
- $\theta(t) - 20 = 70e^{-kt} > 0$ pour tout t : le café n'atteint **jamais** 20°C (mais $\theta(t) \rightarrow 20$ en $+\infty$).

■ Corrigé de l'exercice 15

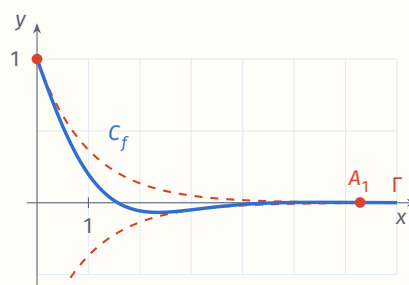
Partie I. $r^2 + 2r + 2 = 0$: $\Delta = -4$, $r = -1 \pm i$: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $y' = e^{-x}[(C_2 - C_1) \cos x - (C_1 + C_2) \sin x]$.

$f(0) = C_1 = 1$ et $f'(0) = C_2 - C_1 = -1$, donc $C_2 = 0$: $f(x) = e^{-x} \cos x$.

Partie II.

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$ donnent $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Comme $e^{-x} \rightarrow 0$, les gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. $f'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$, soit $f'(x) = -\sqrt{2}e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ (exercice 13).
 Sur $[0, \pi]$: $x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, et $\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \iff x < \frac{3\pi}{4}$. Donc $f' < 0$ sur $[0, \frac{3\pi}{4}[$ et $f' > 0$ sur $]\frac{3\pi}{4}, \pi]$.
3. $f(x) = e^{-x} \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (car $x \geq 0$) : points communs $A_k(2k\pi, e^{-2k\pi})$.
 $f'(2k\pi) = -e^{-2k\pi} = g'(2k\pi)$: même point, même pente, donc **même tangente**.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$-e^{-\pi}$



■ Corrigé de l'exercice 16

1. On rappelle que $x \mapsto e^{rx}$ est solution si et seulement si $r^2 + ar + b = 0$.
- a) -1 et 3 doivent être racines de $r^2 + ar + b$, donc $r^2 + ar + b = (r + 1)(r - 3) = r^2 - 2r - 3$: $a = -2$, $b = -3$.
- b) $y = xe^{5x}$: $y' = (1 + 5x)e^{5x}$, $y'' = (10 + 25x)e^{5x}$, donc $y'' + ay' + by = [(25 + 5a + b)x + (10 + a)]e^{5x}$.
 C'est nul pour tout x si et seulement si $10 + a = 0$ et $25 + 5a + b = 0$: $a = -10$, $b = 25$ (racine double 5).

c) $y = e^{2x} \sin 3x$: $y' = e^{2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)$, $y'' = e^{2x}(-5 \sin 3x + 12 \cos 3x)$, donc

$$y'' + ay' + by = e^{2x}[(-5 + 2a + b) \sin 3x + (12 + 3a) \cos 3x].$$

En $x = 0$: $12 + 3a = 0$; en $x = \frac{\pi}{6}$: $-5 + 2a + b = 0$. D'où $a = -4$, $b = 13$ (racines $2 \pm 3i$ de $r^2 - 4r + 13$), qui conviennent.

2. Les solutions de $y' = ay + b$ sont $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Il faut $a = -2$ et $-\frac{b}{a} = 5$, soit $b = 10$: $y' = -2y + 10$.

Vérification : $y = Ce^{-2x} + 5$ donne $y' = -2Ce^{-2x} = -2(y - 5) = -2y + 10$ ✓.

25

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. $p_1' - 2p_1 = a - 2ax - 2b = -2ax + (a - 2b) = 4x$: $-2a = 4$ et $a - 2b = 0$, d'où $p_1(x) = -2x - 1$.

$$p_2' - 2p_2 = ce^x - 2ce^x = -ce^x = 3e^x : p_2(x) = -3e^x.$$

2. Superposition : $p = p_1 + p_2$ vérifie $p' - 2p = (p_1' - 2p_1) + (p_2' - 2p_2) = 4x + 3e^x$: c'est une solution particulière de (E). Les solutions de $y' = 2y$ étant Ce^{2x} :

$$y = Ce^{2x} - 3e^x - 2x - 1 \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad y(0) = C - 4 = 0 : f(x) = 4e^{2x} - 3e^x - 2x - 1.$$

3. Avec $h = ce^{2x}$: $h' - 2h = 2ce^{2x} - 2ce^{2x} = 0 \neq e^{2x}$ (e^{2x} est solution de l'équation homogène $y' = 2y$) : aucune solution de cette forme.

Avec $h = axe^{2x}$: $h' = a(1 + 2x)e^{2x}$, donc $h' - 2h = ae^{2x}$: $a = 1$ et $h(x) = xe^{2x}$. Solutions de (F) :

$$y = (x + C)e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■ Corrigé de l'exercice 18

1. En divisant par m : $v' = g - \frac{k}{m}v = 10 - \frac{16}{80}v = -0,2v + 10$. Les solutions sont $Ce^{-0,2t} + 50$ ($-\frac{b}{a} = \frac{10}{0,2} = 50$), et $v(0) = C + 50 = 0$ donne $C = -50$: $v(t) = 50(1 - e^{-t/5})$.

2. $e^{-t/5} \rightarrow 0$, donc $v_p = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (180 km/h). $v(t) = 0,95 v_p \iff e^{-t/5} = 0,05 \iff t = 5 \ln 20 \approx 15 \text{ s}$.

3. d est la primitive de v nulle en 0 : $d(t) = 50t + 250e^{-t/5} + K$ (on vérifie $d' = 50 - 50e^{-t/5} = v$), et $d(0) = 250 + K = 0$:

$$d(t) = 50t - 250(1 - e^{-t/5}) \quad \text{et} \quad d(20) = 750 + 250e^{-4} \approx 755 \text{ m}.$$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $r^2 + 2mr + 1 = 0$, $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m - 1)(m + 1)$, avec $m \geq 0$.

- $m > 1$: $\Delta > 0$, $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - 1}$: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ (régime **apériodique**).
- $m = 1$: racine double -1 : $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$ (régime **critique**).

• $0 \leq m < 1$: $r = -m \pm i\omega$ avec $\omega = \sqrt{1 - m^2}$: $y = e^{-mx} (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)$ (régime **pseudo-périodique**).

2. $r^2 + \frac{5}{2}r + 1 = 0 \iff 2r^2 + 5r + 2 = (2r + 1)(r + 2) = 0$: $f = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}$, avec $f(0) = C_1 + C_2 = 0$ et $f'(0) = -\frac{C_1}{2} - 2C_2 = 3$. Donc $C_1 = 2, C_2 = -2$: $f(x) = 2e^{-x/2} - 2e^{-2x}$.

3. Si $m > 1$: $r_1 r_2 = 1 > 0$ et $r_1 + r_2 = -2m < 0$, donc $r_1, r_2 < 0$ et $e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \rightarrow 0$. Si $m = 1$: $x e^{-x} \rightarrow 0$ et $e^{-x} \rightarrow 0$. Si $0 < m < 1$: $|y| \leq (|C_1| + |C_2|) e^{-mx} \rightarrow 0$. Dans tous les cas, $y \rightarrow 0$.

Si $m = 0$: $y = \cos x$ est solution et n'a pas de limite en $+\infty$: **c'est faux** (sans frottement, l'oscillation ne s'amortit pas).

■ Corrigé de l'exercice 20

1. $f > 0$, donc $g = \frac{1}{f}$ est dérivable et $g' = -\frac{f'}{f^2}$. Si $f' = 2f - f^2$: $g' = -\frac{2}{f} + 1 = -2g + 1$. Réciproquement, si $g' = -2g + 1$, alors $f = \frac{1}{g}$ et $f' = -\frac{g'}{g^2} = \frac{2g - 1}{g^2} = \frac{2}{g} - \frac{1}{g^2} = 2f - f^2$.

2. $g(x) = C e^{-2x} + \frac{1}{2}$ et $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 2$, donc $C = \frac{3}{2}$: $g(x) = \frac{1+3e^{-2x}}{2}$ et $f(x) = \frac{2}{1+3e^{-2x}}$.

En $-\infty$: $e^{-2x} \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow 0$; en $+\infty$: $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 2$ (la population se stabilise à 2 000 individus).

3. $1 - (f - 1)^2 = 1 - f^2 + 2f - 1 = 2f - f^2 = f'$. Donc $f'(x) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $f(x) = 1$. Comme $0 < f < 2$, $f' = f(2 - f) > 0$: f est continue, strictement croissante de 0 à 2, et prend la valeur 1 en un seul point x_0 : $1 + 3e^{-2x_0} = 2 \iff x_0 = \frac{\ln 3}{2} \approx 0,55$ (vitesse maximale $f'(x_0) = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 21

1. $g'(x) = f'(x)e^{x^2} + 2xf(x)e^{x^2} = (f'(x) + 2xf(x))e^{x^2}$. Comme $e^{x^2} > 0$: $f' + 2xf = 2x \iff g'(x) = 2xe^{x^2}$.

2. $2xe^{x^2}$ est la dérivée de e^{x^2} : $g' = 2xe^{x^2} \iff (g - e^{x^2})' = 0 \iff g(x) = e^{x^2} + C$ ($\mathbb{R}$ est un intervalle). Donc $f(x) = 1 + Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. $f(0) = 1 + C = 3$: $f(x) = 1 + 2e^{-x^2}$. $f(-x) = f(x)$: f est **paire**. $f'(x) = -4xe^{-x^2}$: f croît sur $]-\infty, 0]$, décroît sur $[0, +\infty[$, maximum $f(0) = 3$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ (car $e^{-x^2} \rightarrow 0$) : asymptote $y = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 22

1. $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$: 1 est racine double, donc e^x et $x e^x$ sont solutions de $y'' - 2y' + y = 0$. Pour $h = a e^x$ ou $h = a x e^x$, on a donc $h'' - 2h' + h = 0 \neq e^x$.

2. $f = z e^x$: $f' = (z' + z)e^x$, $f'' = (z'' + 2z' + z)e^x$, donc $f'' - 2f' + f = (z'' + 2z' + z - 2z' - 2z + z)e^x = z'' e^x$.

3. f solution $\iff z'' e^x = e^x \iff z'' = 1 \iff (z' - x)' = 0 \iff z' = x + C_1 \iff z = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.
Donc $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) e^x$.

4. $f(0) = C_2 = 1$; $f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + (C_1 + 1)x + C_1 + C_2\right)e^x$, donc $f'(0) = C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 = -1$:

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x.$$

■ Corrigé de l'exercice 23

1. En divisant par L : $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$, d'où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Ici $LC = 0,1 \times 10^{-5} = 10^{-6}$: $\omega_0 = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 6,3 \text{ ms}.$$

2. $q(t) = A \cos(1000t) + B \sin(1000t)$; $q(0) = A = Q_0$ et $q'(0) = 1000B = 0$: $q(t) = 6 \times 10^{-5} \cos(1000t)$ (en C).

$i(t) = q'(t) = -6 \times 10^{-2} \sin(1000t)$ (en A) : $|i(t)|$ est maximale pour $\sin(1000t) = \pm 1$, et vaut $Q_0 \omega_0 = 0,06 \text{ A} = 60 \text{ mA}$.

3. $E'(t) = \frac{2q q'}{2C} + \frac{1}{2}L \times 2 i i' = i \left(\frac{q}{C} + L q''\right) = 0$ (car $i = q'$ et $i' = q''$). Donc E est constante :

$$E(t) = E(0) = \frac{Q_0^2}{2C} + 0 = \frac{36 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-5}} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ J}.$$

Remarque. L'énergie passe sans cesse du condensateur ($\frac{q^2}{2C}$) à la bobine ($\frac{1}{2}Li^2$) ; on retrouve $\frac{1}{2}Li_{\text{max}}^2 = 0,05 \times 0,0036 = 1,8 \times 10^{-4} \text{ J}$.

26 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $x \mapsto f(-x)$ est dérivable (composée), donc f' l'est aussi et $f''(x) = -f'(-x)$. Or la relation appliquée en $-x$ donne $f'(-x) = f(x)$. Donc $f''(x) = -f(x)$: $f'' + f = 0$.

2. Nécessairement $f(x) = A \cos x + B \sin x$. Alors $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f(-x) = A \cos x - B \sin x$. L'égalité en $x = 0$ impose $B = A$, et réciproquement, si $B = A$, les deux expressions sont égales pour tout x :

$$f(x) = A(\cos x + \sin x), \quad A \in \mathbb{R}.$$

3. $f'(x) = e^x - f(-x)$ est dérivable et $f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x)$ (relation en $-x$). Donc $f'' + f = e^x + e^{-x}$.

Avec $h = ae^x + be^{-x}$: $h'' + h = 2ae^x + 2be^{-x}$, donc $a = b = \frac{1}{2}$. D'où $f(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Réciproque (indispensable : on a seulement trouvé des conditions nécessaires) :

$$f'(x) + f(-x) = \left(-A \sin x + B \cos x + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \left(A \cos x - B \sin x + \frac{e^{-x} + e^x}{2}\right) = (A + B)(\cos x - \sin x) + e^x.$$

C'est e^x pour tout x si et seulement si $B = -A$: $f(x) = A(\cos x - \sin x) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad A \in \mathbb{R}.$

■ Corrigé de l'exercice 25

1. Avec $x = y = 0$: $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou 1 . Si $f(0) = 0$, alors $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ pour tout x : exclu. Donc $f(0) = 1$.
2. À x fixé, on dérive les deux membres par rapport à y : $f'(x+y) = f(x)f'(y)$. Avec $y = 0$: $f'(x) = af(x)$.
Donc $f(x) = Ce^{ax}$, et $f(0) = C = 1$: $f(x) = e^{ax}$. Réciproquement, $e^{a(x+y)} = e^{ax}e^{ay}$: ce sont les solutions ($a \in \mathbb{R}$).
3. $x = y = 0$: $g(0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$. En dérivant par rapport à y : $g'(x+y) = g'(y) + 2x$; avec $y = 0$: $g'(x) = 2x + b$, où $b = g'(0)$.
Alors $(g(x) - x^2 - bx)' = 0$, donc $g(x) = x^2 + bx + c$, et $g(0) = 0$ donne $c = 0$. Réciproquement, $(x+y)^2 + b(x+y) = (x^2 + bx) + (y^2 + by) + 2xy$: $g(x) = x^2 + bx$, $b \in \mathbb{R}$.

■ Corrigé de l'exercice 26

1. $\varphi' = 2gg' + 2g'g'' = 2g'(g + g'') = 0$: φ est constante, égale à $\varphi(0) = 0$. Ainsi $g^2 + g'^2 = 0$: une somme de deux carrés nulle impose $g^2 = 0$, donc $g = 0$.
2. Soit $g(x) = f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x$. Comme $\cos$, $\sin$ et f sont solutions, $g'' + g = 0$ (linéarité). De plus $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. D'après 1., $g = 0$: $f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x$.
3. $f(x) = \sin(x+a)$ vérifie $f'' = -f$, $f(0) = \sin a$ et $f'(0) = \cos a$. D'après 2. : $\sin(x+a) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$ pour tous réels x et a .

Remarque. Avec $\varphi = \omega^2 g^2 + g'^2$, la même méthode démontre le théorème pour $y'' + \omega^2 y = 0$: les conditions $y(0)$ et $y'(0)$ déterminent une **unique** solution.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. Les solutions sont $y = A \cos x + B \sin x$, et $y(0) = A$.
 - a) $A = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = B = 1$: une **unique** solution, $y = \sin x$.
 - b) $A = 0$ et $y(\pi) = -A = 0$ (toujours vrai) : une **infinité** de solutions, $y = B \sin x$, $B \in \mathbb{R}$.
 - c) $A = 0$ et $y(\pi) = -A = 1$: contradiction, **aucune** solution.
2. $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$; $y(0) = A = 0$, puis $y(1) = B \sin \omega = 0$. Une solution non nulle exige $B \neq 0$, donc $\sin \omega = 0$, soit $\omega = k\pi$; comme $\omega > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, si $\omega = k\pi$, la fonction $x \mapsto \sin(k\pi x)$ est non nulle et s'annule en 0 et 1.

Remarque. Avec $y(0)$ et $y'(0)$, il y a toujours une unique solution ; avec des conditions « aux deux bords », il peut y en avoir 0, 1 ou une infinité. Les valeurs $\omega = k\pi$ sont les modes propres d'une corde vibrante fixée en ses deux extrémités.

■ Corrigé de l'exercice 28

1. $h = a \cos x$: $h'' + 4h = -a \cos x + 4a \cos x = 3a \cos x$, donc $a = 1$. Les solutions sont $y = \cos x + A \cos 2x + B \sin 2x$ et $|y| \leq 1 + |A| + |B|$: elles sont **bornées**.

2. $u = a \cos 2x + b \sin 2x$ vérifie $u'' = -4u$, donc $u'' + 4u = 0 \neq 4 \cos 2x$: aucune solution de cette forme.

Avec $h = xu$: $h' = u + xu'$, $h'' = 2u' + xu''$, donc $h'' + 4h = 2u' + x(u'' + 4u) = 2u' = -4a \sin 2x + 4b \cos 2x$.

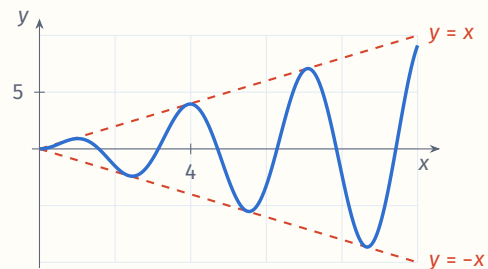
C'est $4 \cos 2x$ si et seulement si $a = 0$, $b = 1$: $h(x) = x \sin 2x$.

Solutions de (E) : $y = x \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x$ ($A, B \in \mathbb{R}$).

3. $f(0) = A = 0$; $f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, donc $f'(0) = 2B = 0$: $f(x) = x \sin 2x$.

Pour $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) : $f(x_k) = x_k \rightarrow +\infty$: **f n'est pas bornée** sur $[0, +\infty[$.

C'est la **résonance** : l'excitation $4 \cos 2x$ a la pulsation propre $\omega = 2$ du système, et l'amplitude grandit sans limite entre les droites $y = x$ et $y = -x$ (au 1., la pulsation $1 \neq 2$ donne des solutions bornées).



■ Corrigé de l'exercice 29

1. $u' = x' + y' = 3x + 3y = 3u$ et $u(0) = 1$: $u = e^{3t}$. $v' = x' - y' = -x + y = -v$ et $v(0) = 1$: $v = e^{-t}$. Donc

$$x(t) = \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2}.$$

2. $x' = x + 2y$ est dérivable et $x'' = x' + 2y' = x' + 2(2x + y) = x' + 4x + (x' - x) = 2x' + 3x$: $x'' - 2x' - 3x = 0$.

$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1)$: $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$, avec $x(0) = C_1 + C_2 = 1$ et $x'(0) = x(0) + 2y(0) = 1 = 3C_1 - C_2$: $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. Puis $y = \frac{x' - x}{2} = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2}$: même résultat.

3. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv = e^{2t}$. $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{e^{3t} + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-4t}}{1 + e^{-4t}} \rightarrow 1$.

■ Corrigé de l'exercice 30

1. $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t f''(e^t) + e^{2t} f'''(e^t)$.

2. Avec $x = e^t$: $xf'(x) = g'(t)$ et $x^2 f''(x) = g''(t) - g'(t)$, donc

$$x^2 f''(x) - 3xf'(x) + 4f(x) = g''(t) - 4g'(t) + 4g(t).$$

Comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, (E) est vraie pour tout $x > 0$ si et seulement si (F) est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2$: $g(t) = (C_1 t + C_2) e^{2t}$, donc $f(x) = g(\ln x) = x^2 (C_1 \ln x + C_2)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. $f(1) = C_2 = 1$; $f'(x) = 2x(C_1 \ln x + C_2) + C_1 x$, donc $f'(1) = 2C_2 + C_1 = 0$ et $C_1 = -2$:

$$f(x) = x^2 (1 - 2 \ln x) \quad (\text{vérification : } f'(x) = -4x \ln x, f''(x) = -4 \ln x - 4, \text{ et } x^2 f'' - 3xf' + 4f = 0 \checkmark).$$

27 Corrigés : l'équation $y' = ay + b$

■ Corrigé de l'exercice 31

1. On isole y' , puis on applique : $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) $\Leftrightarrow y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

a) $a = 3$: $y = Ce^{3x}$. b) $y' = -5y$: $y = Ce^{-5x}$. c) $y' = \frac{1}{2}y$: $y = Ce^{\frac{x}{2}}$.

d) $a = -2$, $b = 6$ et $-\frac{b}{a} = 3$: $y = Ce^{-2x} + 3$.

e) $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$: $a = -\frac{1}{3}$ et $-\frac{b}{a} = \frac{4/3}{1/3} = 4$: $y = Ce^{-\frac{x}{3}} + 4$.

f) $y' = 5y - 10$: $a = 5$, $b = -10$ et $-\frac{b}{a} = 2$: $y = Ce^{5x} + 2$.

2. On écrit la solution générale, puis on applique la condition pour trouver C .

a) $f(x) = Ce^{3x}$ et $f(0) = C = -2$: $f(x) = -2e^{3x}$.

b) $f(x) = Ce^{-2x} + 3$ et $f(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$: $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$.

c) $f(x) = Ce^{-\frac{x}{3}} + 4$ et $f(3) = Ce^{-1} + 4 = 3$, donc $C = -e$: $f(x) = 4 - e^{1-\frac{x}{3}}$.

d) $f(x) = Ce^{5x} + 2$, donc $f'(x) = 5Ce^{5x}$ et $f'(0) = 5C = 5$: $C = 1$ et $f(x) = e^{5x} + 2$.

(Autre méthode : l'équation donne $f'(0) = 5f(0) - 10$, donc $f(0) = 3$, puis $C + 2 = 3$.)

3. $g'(x) = -4 \times \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} = -\frac{4}{3}e^{\frac{x}{3}}$, donc $3g'(x) - g(x) = -4e^{\frac{x}{3}} - 3 + 4e^{\frac{x}{3}} = -3$ pour tout réel x : g est bien solution. ✓

■ Corrigé de l'exercice 32

1. L'équation en 0 donne $f'(0) = af(0) + b = b$, donc $b = 8$. Les solutions sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; elles ont toutes une limite finie en $+\infty$, donc $a < 0$ (pour $a > 0$ et $C \neq 0$, Ce^{ax} tend vers $\pm\infty$), et cette limite est $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{a} = 2$. Ainsi $a = -4$: $(E) : y' = -4y + 8$.

2. $f'(x) = 10e^{2x}$ et $af(x) + b = 5ae^{2x} - 3a + b$. L'égalité $f'(x) = af(x) + b$ pour tout x s'écrit

$$(10 - 5a)e^{2x} = b - 3a \quad \text{pour tout réel } x.$$

Le membre de droite est constant ; celui de gauche ne l'est que si $10 - 5a = 0$. Donc $a = 2$, puis $b = 3a$: $a = 2$, $b = 6$.

3. a) $f' = af + b$ est dérivable (car f l'est), et en dérivant : $f'' = af'$. En 0 : $6 = 2a$, donc $a = 3$; puis $f'(0) = af(0) + b$ donne $2 = 3 + b$: $b = -1$.

b) $f(x) = Ce^{3x} + \frac{1}{3}$ et $f(0) = C + \frac{1}{3} = 1$, donc $C = \frac{2}{3}$: $f(x) = \frac{2e^{3x} + 1}{3}$.

4. On a $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \neq 0$ (sinon f serait constante et T serait horizontale).

• f a une limite finie en $+\infty$, donc e^{ax} aussi : c'est le cas pour $a < 0$, et alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{b}{a}$.

Ainsi $-\frac{b}{a} = 1$.

- $f(0) = C + 1 = 3$, donc $C = 2$.
- La pente de T est $f'(0) = \frac{-1-3}{1-0} = -4$; or $f'(0) = aC = 2a$, donc $a = -2$ (bien négatif) et $b = -a = 2$.

Conclusion : $(E) : y' = -2y + 2$ et $f(x) = 2e^{-2x} + 1$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $(E) \iff y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} : a = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{b}{a} = 3$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{x}{2}} + 3$, $C \in \mathbb{R}$.

2. $f(2) = Ce^{-1} + 3 = 1$, donc $C = -2e$: $f(x) = 3 - 2e^{1-\frac{x}{2}}$.

3. $f'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{1-\frac{x}{2}} = e^{1-\frac{x}{2}} > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En $-\infty : 1 - \frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, donc $e^{1-\frac{x}{2}} \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. En $+\infty : e^{1-\frac{x}{2}} \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	3

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$; comme $f(x) - 3 = -2e^{1-\frac{x}{2}} < 0$, la courbe est en dessous.

4. $f(x) = 0 \iff e^{1-\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \iff 1 - \frac{x}{2} = \ln \frac{3}{2} \iff x = 2 - 2 \ln \frac{3}{2} \approx 1,19$.

5. $f(2) = 1$ et $f'(2) = e^0 = 1$: $T : y = 1 \times (x - 2) + 1$, soit $T : y = x - 1$.

En dérivant l'égalité $2f' + f = 3$: $2f'' + f' = 0$, soit $f'' = -\frac{1}{2}f'$. Comme $f' > 0$, on a $f'' < 0$: C_f est **concave** sur $\mathbb{R}$, donc située **en dessous de ses tangentes**. Ainsi C_f est en dessous de T : $f(x) \leq x - 1$ pour tout réel x , avec égalité seulement en $x = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $f(x) = Ce^{-2x}$ et $f(\ln 3) = Ce^{-2 \ln 3} = \frac{C}{9} = 2$, donc $C = 18$: $f(x) = 18e^{-2x}$.

2. $g(x) = Ce^{-x} + 2$ et $g'(x) = -Ce^{-x}$. La tangente en 0 est parallèle à $y = 3x$ si et seulement si $g'(0) = 3$, soit $-C = 3$: $g(x) = 2 - 3e^{-x}$.

3. $2y' = y - 4 \iff y' = \frac{1}{2}y - 2$, de solutions $k(x) = Ce^{\frac{x}{2}} + 4$. Si $C \neq 0$, $|k(x)| \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ (car $e^{\frac{x}{2}} \rightarrow +\infty$) : k n'est pas bornée. Seule la solution constante convient : $k(x) = 4$.

4. Posons $c = f(0)$. La condition s'écrit $f' = f + c$: f est solution de $y' = y + c$, donc $f(x) = Ke^x - c$ avec $K \in \mathbb{R}$. En $x = 0$: $K - c = c$, soit $K = 2c$. Réciproquement, si $f(x) = c(2e^x - 1)$, alors $f(0) = c$ et $f'(x) - f(x) = 2ce^x - 2ce^x + c = f(0)$. Les solutions sont

$$f(x) = c(2e^x - 1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. Les solutions sont $f_C(x) = Ce^{2x} + 1$; on a $f_C(0) = C + 1$ et $f'_C(0) = 2C$. La tangente en 0 a pour équation

$$y = 2Cx + C + 1, \quad \text{soit} \quad y = C(2x + 1) + 1.$$

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $y = 1$ quel que soit C : toutes ces tangentes passent par le point

$$\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

■ Corrigé de l'exercice 35

1. L'équation donne directement $f'_m(0) = m f_m(0) + 1 = 1$. La tangente à C_m en O a donc pour équation $y = 1 \times x + 0$, soit $T : y = x$, pour tout m .

2. Pour $m \neq 0$: $f_m(x) = Ce^{mx} - \frac{1}{m}$ et $f_m(0) = C - \frac{1}{m} = 0$, d'où $f_m(x) = \frac{e^{mx} - 1}{m}$.

Pour $m = 0$: (E_0) s'écrit $y' = 1$, donc $f_0(x) = x + K$, et $f_0(0) = 0$ donne $f_0(x) = x$.

3. • Si $m > 0$: $e^{mx} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$ (on divise par $m > 0$). De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$.

- Si $m < 0$: $e^{mx} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \frac{0 - 1}{m} = -\frac{1}{m} > 0$.

La limite est finie si et seulement si $m < 0$; C_m admet alors l'asymptote horizontale $y = -\frac{1}{m}$.

4. Pour $x = 0$: $f_m(0) = 0 = f_0(0)$. Pour $x \neq 0$, posons $u = mx$, qui tend vers 0 quand $m \rightarrow 0$:

$$f_m(x) = x \times \frac{e^{mx} - 1}{mx} = x \times \frac{e^u - 1}{u} \xrightarrow{m \rightarrow 0} x \times 1 = x = f_0(x).$$

5. $f_m(x) - x = \frac{e^{mx} - 1 - mx}{m}$, et le numérateur est positif ou nul ($e^u \geq 1 + u$ avec $u = mx$), nul seulement pour $x = 0$.

- Si $m > 0$: $f_m(x) \geq x$: C_m est **au-dessus** de T (et ne la touche qu'en O).
- Si $m < 0$: $f_m(x) \leq x$: C_m est **en dessous** de T . (Pour $m = 0$, $C_0 = T$.)

■ Corrigé de l'exercice 36

1. a) $z = f^2$ est dérivable et $z' = 2ff'$.

• Si $f' = f - \frac{1}{f}$, alors $z' = 2f\left(f - \frac{1}{f}\right) = 2f^2 - 2 = 2z - 2$.

• Réciproquement, si $z' = 2z - 2$, alors (comme $f \neq 0$) $f' = \frac{z'}{2f} = \frac{2f^2 - 2}{2f} = f - \frac{1}{f}$.

- b) (G) est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 2$, $b = -2$: $z(x) = Ce^{2x} + 1$.

$f(0) = \sqrt{2} \iff z(0) = 2 \iff C = 1$. Donc $z(x) = 1 + e^{2x} > 0$ et, puisque $f > 0$:

$$f(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{1 + e^{2x}},$$

qui est bien dérivable, strictement positive, et solution de (F) d'après a).

$$c) f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} > 0 : f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \text{ En } -\infty : e^{2x} \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$$\boxed{\lim_{-\infty} f = 1} ; \text{ en } +\infty : \boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}.$$

Avec la quantité conjuguée (et $e^x = \sqrt{e^{2x}}$) :

$$f(x) - e^x = \frac{(1 + e^{2x}) - e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}} + e^x} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + e^x} > 0,$$

et le dénominateur tend vers $+\infty$ en $+\infty$: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^x) = 0}$. La courbe de f est toujours **au-dessus** de celle de $\exp$, et les deux courbes se rapprochent indéfiniment en $+\infty$ (courbes asymptotes) ; en $-\infty$, la droite $y = 1$ est asymptote à la courbe de f .

$$2. g > 0, \text{ donc } z = \ln g \text{ est dérivable et } z' = \frac{g'}{g}. \text{ Ainsi : } g' = g(1 - \ln g) \iff \frac{g'}{g} = 1 - \ln g \iff z' = -z + 1.$$

$$\text{D'où } z(x) = Ce^{-x} + 1 ; g(0) = 1 \iff z(0) = 0 \iff C = -1. \text{ Donc } z(x) = 1 - e^{-x} \text{ et } \boxed{g(x) = e^{1-e^{-x}}}.$$

$$\text{En } +\infty : 1 - e^{-x} \rightarrow 1, \text{ donc } \boxed{\lim_{+\infty} g = e} ; \text{ en } -\infty : 1 - e^{-x} \rightarrow -\infty, \text{ donc } \boxed{\lim_{-\infty} g = 0}.$$

(g est un modèle classique de croissance freinée : le modèle de Gompertz.)

28 Corrigés : équations avec second membre

■ Corrigé de l'exercice 37

Dans chaque cas : si h est solution de (E) , alors f est solution de $(E) \iff f - h$ est solution de l'équation homogène (E_0) ; les solutions de (E) sont donc les fonctions « solution de $(E_0) + h$ ».

$$1. a) h'(x) + 4h(x) = 1 + 4x + 4 = 4x + 5 \quad \checkmark \quad b) (E_0) : y' = -4y, \text{ d'où } \boxed{y = Ce^{-4x} + x + 1}, C \in \mathbb{R}.$$

$$c) f(0) = C + 1 = 0, \text{ donc } C = -1 : \boxed{f(x) = x + 1 - e^{-4x}}.$$

$$2. a) h'(x) - 2h(x) = -e^{-x} - 2e^{-x} = -3e^{-x} \quad \checkmark \quad b) (E_0) : y' = 2y, \text{ d'où } \boxed{y = Ce^{2x} + e^{-x}}.$$

$$c) f(0) = C + 1 = 0 : \boxed{f(x) = e^{-x} - e^{2x}}.$$

$$3. a) h'(x) = -2 \sin x + \cos x, \text{ donc } h'(x) + 2h(x) = -2 \sin x + \cos x + 4 \cos x + 2 \sin x = 5 \cos x \quad \checkmark$$

$$b) (E_0) : y' = -2y, \text{ d'où } \boxed{y = Ce^{-2x} + 2 \cos x + \sin x}.$$

$$c) f(0) = C + 2 = 0 : \boxed{f(x) = 2 \cos x + \sin x - 2e^{-2x}}.$$

$$4. a) 2h'(x) + h(x) = 4x + x^2 \quad \checkmark \quad b) (E_0) : 2y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{2}y, \text{ d'où } \boxed{y = Ce^{-\frac{x}{2}} + x^2}.$$

$$c) f(0) = C = 0 : \boxed{f(x) = x^2} \text{ (ici, la solution particulière fournie vérifie déjà la condition).}$$

■ Corrigé de l'exercice 38

On remplace h dans l'équation et on **identifie** les coefficients (deux polynômes égaux pour tout x ont les mêmes coefficients ; si $A \cos x + B \sin x = 0$ pour tout x , alors $A = B = 0$, en prenant $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$).

1. $h'(x) + h(x) = 2ax + b + ax^2 + bx + c = ax^2 + (2a + b)x + (b + c)$. On veut $a = 1$, $2a + b = 0$ et $b + c = 0$: $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ et } (E_0) : y' = -y : \boxed{y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2}, C \in \mathbb{R}.$$

2. $h'(x) + 3h(x) = 2ae^{2x} + 3ae^{2x} = 5ae^{2x}$: $a = 1$, $h(x) = e^{2x}$, et $\boxed{y = Ce^{-3x} + e^{2x}}$.

La courbe passe par $A(0, 3)$ si et seulement si $C + 1 = 3$, soit $C = 2$: $\boxed{f(x) = 2e^{-3x} + e^{2x}}$.

3. $h'(x) = -a \sin x + b \cos x$, donc $h'(x) - 2h(x) = (b - 2a) \cos x + (-a - 2b) \sin x$.

On veut $b - 2a = 0$ et $-a - 2b = 5$: $b = 2a$ et $-5a = 5$, soit $a = -1$, $b = -2$. $h(x) = -\cos x - 2 \sin x$ et $\boxed{y = Ce^{2x} - \cos x - 2 \sin x}$.

4. $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$, donc $h'(x) + h(x) = (2ax + a + 2b)e^x$. On veut $2a = 2$ et $a + 2b = 3$: $a = 1$, $b = 1$.

$$h(x) = (x + 1)e^x \text{ et } \boxed{y = Ce^{-x} + (x + 1)e^x}.$$

■ Corrigé de l'exercice 39

1. $h'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x}$, donc $h'(x) + h(x) = (2ax + b)e^{-x}$.

Comme $e^{-x} \neq 0$: $h' + h = xe^{-x} \iff 2ax + b = x$ pour tout $x \iff a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Ainsi

$$\boxed{h(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}}.$$

2. Puisque $h' + h = xe^{-x}$: $g' + g = xe^{-x} \iff g' + g = h' + h \iff (g - h)' + (g - h) = 0$.

3. $(E_0) : y' = -y$ a pour solutions Ce^{-x} ; donc $g - h = Ce^{-x}$ et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$f(0) = C = 1 : \boxed{f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x}}.$$

4. a) En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{e^x} + e^{-x}$ et $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$: la droite $y = 0$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

En $-\infty$: $\frac{x^2}{2} + 1 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$. De plus $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)e^{-x} \rightarrow (-\infty) \times (+\infty)$,

donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$: C_f admet en $-\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

- b) f est solution de (E) , donc $f'(x) = xe^{-x} - f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} - 1\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{-x}$, soit

$$f'(x) = -\frac{1}{2}[(x - 1)^2 + 1]e^{-x} < 0 : \quad f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

c) En dérivant l'égalité $f' + f = xe^{-x}$: $f'' + f' = (1 - x)e^{-x}$, donc

$$f''(x) = (1 - x)e^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{-x} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)e^{-x} = \frac{1}{2}(x - 2)^2 e^{-x}.$$

f'' s'annule en 2 mais **ne change pas de signe** ($f'' \geq 0$) : C_f est convexe sur $\mathbb{R}$ et **n'admet pas** de point d'inflexion.

5. f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ contient 2 : l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α . De plus $f(-1) = \frac{3}{2}e \approx 4,08 > 2$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}\sqrt{e} \approx 1,85 < 2$; comme f est décroissante : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ ($\alpha \approx -0,55$).

■ Corrigé de l'exercice 40

- a) On a $f' = af + \varphi$ et $g' = ag + \varphi$; en soustrayant : $(g - f)' = a(g - f)$. Or $(g - f)(x) = 2e^{2x}$ et $(g - f)'(x) = 4e^{2x} = 2 \times 2e^{2x}$: $a = 2$.

b) $\varphi(x) = f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} + 1 - 2e^{2x} - 2x$, soit $\varphi(x) = 1 - 2x$. La fonction $p : x \mapsto x$ est solution de (E) : $y' = 2y + 1 - 2x$ ($p'(x) = 1 = 2x + 1 - 2x$), donc les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x} + x$, $C \in \mathbb{R}$ (f et g correspondent à $C = 1$ et $C = 3$).
- Pour $C = 0$ et $C = 1$: $x \mapsto 3x - 1$ et $x \mapsto e^{-2x} + 3x - 1$ sont solutions ; leur différence $x \mapsto e^{-2x}$ est solution de $y' + ay = 0$, donc $-2 + a = 0$ et $a = 2$. Ensuite, $h(x) = 3x - 1$ donne $h'(x) + 2h(x) = 6x + 1$: $b = 6$, $c = 1$.

Réciproquement, $y' + 2y = 6x + 1$ a pour solutions $Ce^{-2x} + 3x - 1$. Donc $a = 2$, $b = 6$, $c = 1$.
- a) $p'(x) + p(x) = a + ax + b - a = ax + b$ ✓ Les solutions de (F) sont $x \mapsto Ce^{-x} + ax + b - a$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) - (ax + b - a) = Ce^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: la droite $y = ax + (b - a)$ est asymptote à C en $+\infty$. Une courbe a au plus une asymptote oblique en $+\infty$ (si $y = mx + q$ et $y = m'x + q'$ le sont, alors $(m - m')x + (q - q') \rightarrow 0$, d'où $m = m'$ et $q = q'$). Donc $a = 2$ et $b - a = -1$: $a = 2$, $b = 1$.

Enfin $f(0) = C - 1 = 1$, donc $C = 2$: $f(x) = 2e^{-x} + 2x - 1$.

c) $f'(x) = -2e^{-x} + 2$, donc $f'(0) = 0$: la tangente en A est horizontale (directement avec (F) : $f'(0) = 2 \times 0 + 1 - f(0) = 0$).

■ Corrigé de l'exercice 41

- $z'(x) = f'(x)e^{-\alpha x} - \alpha f(x)e^{-\alpha x} = (f'(x) - \alpha f(x))e^{-\alpha x}$. Comme $e^{-\alpha x} \neq 0$:

$$f'(x) - \alpha f(x) = \varphi(x) \iff (f'(x) - \alpha f(x))e^{-\alpha x} = \varphi(x)e^{-\alpha x} \iff z'(x) = \varphi(x)e^{-\alpha x}.$$
- Ici $\alpha = -2$ et $z(x) = f(x)e^{2x}$: $z'(x) = (2x + 1)e^{-2x}e^{2x} = 2x + 1 \iff z(x) = x^2 + x + C$ (primitives sur $\mathbb{R}$). Les solutions sont

$$x \mapsto (x^2 + x + C)e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{et celle qui s'annule en 0 est } x \mapsto (x^2 + x)e^{-2x}.$$

3. Ici $\alpha = -1$, $z(x) = f(x)e^x$ et $z'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} e^x = \frac{1}{x+1}$ sur I . Comme $x+1 > 0$: $z(x) = \ln(x+1) + C$. Les solutions sur I sont

$$x \mapsto (\ln(x+1) + C)e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad f(0) = C = 1 : \quad f(x) = (1 + \ln(x+1))e^{-x}.$$

En -1^+ : $\ln(x+1) \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow e$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $\ln(x+1)e^{-x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times (x+1)e^{-x}$ avec $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ et $(x+1)e^{-x} = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \rightarrow 0$; donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

4. Ici $\alpha = 1$, $z(x) = f(x)e^{-x}$ et $z'(x) = \cos x \iff z(x) = \sin x + C$. Les solutions sont $x \mapsto (\sin x + C)e^x$, $C \in \mathbb{R}$.

Comme $e^x > 0$, une solution est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\sin x + C \geq 0$ pour tout réel x . Le minimum de $\sin x + C$ est $C - 1$ (atteint en $-\frac{\pi}{2}$) : la condition équivaut à $C \geq 1$. Les solutions positives sont les $x \mapsto (\sin x + C)e^x$ avec $C \geq 1$.

■ Corrigé de l'exercice 42

1. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, donc $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ et $4\sin^2 x = 2 - 2\cos 2x$.
2. a) Une constante k est solution de (E_1) si et seulement si $0 + 2k = 2$: $h_1 = 1$.
- b) $h'_2(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x$, donc $h'_2(x) + 2h_2(x) = (2a + 2b) \cos 2x + (2b - 2a) \sin 2x$. On veut $2a + 2b = -2$ et $2b - 2a = 0$: $a = b = -\frac{1}{2}$, $h_2(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$.
3. **Superposition** : $h' + 2h = (h'_1 + 2h_1) + (h'_2 + 2h_2) = 2 - 2\cos 2x = 4\sin^2 x$: h est solution de (E) .
 (E_0) : $y' = -2y$ ayant pour solutions Ce^{-2x} , les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{-2x} + 1 - \frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$, donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{4}(\cos 2x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x), \quad \text{d'où l'écriture de } h.$$

$h(x + \pi) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = h(x)$: h est π -périodique. Comme le cosinus prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$:

$$\min h = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29 \quad \left(\text{en } x = \frac{\pi}{8} + k\pi\right) \quad \max h = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,71 \quad \left(\text{en } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi\right)$$

($k \in \mathbb{Z}$).

b) h est bornée (question a). Soit $f = Ce^{-2x} + h$ une solution avec $C \neq 0$: en $-\infty$, $|Ce^{-2x}| \rightarrow +\infty$ et $|f(x)| \geq |C|e^{-2x} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow +\infty$: f n'est pas bornée. Seule h ($C = 0$) est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$5. f(0) = C + 1 - \frac{1}{2} = 0, \text{ donc } C = -\frac{1}{2} : \boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}}.$$

$$\text{Alors } f(x) - h(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}.$$

Interprétation : le terme $-\frac{1}{2}e^{-2x}$ (**régime transitoire**) s'efface rapidement ; ensuite f oscille comme h (**régime permanent**), quelle que soit la condition initiale.

29

Corrigés : équations du second ordre

■ Corrigé de l'exercice 43

1. Dans chaque cas : équation caractéristique, discriminant, racines, puis solutions ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

a) $r^2 - 5r + 6 = 0, \Delta = 1, r \in \{2, 3\} : \boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}.$

b) $r^2 + r - 2 = 0, \Delta = 9, r \in \{1, -2\} : \boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}}.$

c) $2r^2 - 3r + 1 = 0, \Delta = 1, r = \frac{3 \pm 1}{4} \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\} : \boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{x}{2}}}.$

d) $r^2 - 2r = r(r - 2) = 0, r \in \{0, 2\} : \boxed{y = C_1 + C_2 e^{2x}}.$

e) $4r^2 - 1 = 0, r = \pm \frac{1}{2} : \boxed{y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}}.$

f) $y'' - 2y' + y = 0 : (r - 1)^2 = 0$, racine double 1 : $\boxed{y = (C_1 x + C_2) e^x}.$

g) $r^2 + 10r + 25 = (r + 5)^2 = 0$, racine double -5 : $\boxed{y = (C_1 x + C_2) e^{-5x}}.$

h) $r^2 - 2r + 5 = 0, \Delta = -16, r = 1 \pm 2i : \boxed{y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)}.$

i) $r^2 + 6r + 13 = 0, \Delta = -16, r = -3 \pm 2i : \boxed{y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)}.$

2. **g)** : $(C_1 x + C_2) e^{-5x} = C_1 x e^{-5x} + C_2 e^{-5x} \rightarrow 0$. **i)** : $|e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)| \leq (|C_1| + |C_2|) e^{-3x} \rightarrow 0$.

Pour les autres, une solution ne tend pas vers 0 : e^{3x} (a), e^x (b, c, f), la constante 1 (d), $e^{\frac{x}{2}}$ (e), et $e^x \cos 2x$ (h), qui vaut $e^{k\pi}$ en $x = k\pi$. Réponse : **g) et i)** (les racines de l'équation caractéristique ont toutes une partie réelle strictement négative).

■ Corrigé de l'exercice 44

On écrit la solution générale, puis on traduit les deux conditions par un système en C_1, C_2 .

a) $r^2 + 2r - 3 = (r - 1)(r + 3) : f = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 - 3C_2 = 4$, d'où $C_1 = 1, C_2 = -1$: $\boxed{f(x) = e^x - e^{-3x}}.$

b) $(r + 3)^2 : f = (C_1 x + C_2) e^{-3x}$ et $f'(x) = (C_1 - 3C_1 x - 3C_2) e^{-3x}$. $f(0) = C_2 = 1$, $f'(0) = C_1 - 3 = -1$: $\boxed{f(x) = (2x + 1) e^{-3x}}.$

c) $r^2 - 4r + 8 = 0, \Delta = -16, r = 2 \pm 2i : f(x) = e^{2x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, d'où $f'(x) = e^{2x} [(2C_1 + 2C_2) \cos 2x + (2C_2 - 2C_1) \sin 2x]$; $f(0) = C_1 = 1$ et $f'(0) = 2C_1 + 2C_2 = 0$, donc $C_2 = -1$: $\boxed{f(x) = e^{2x} (\cos 2x - \sin 2x)}.$

- d) $r = \pm 1 : f = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. $C_1 + C_2 = 1$ et $f(\ln 2) = 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = \frac{5}{4}$. En remplaçant $C_2 = 1 - C_1$: $\frac{3}{2}C_1 = \frac{3}{4}$, d'où $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- e) $r(r+1) = 0 : f = C_1 + C_2 e^{-x}$, $f'(x) = -C_2 e^{-x}$. $f'(1) = -\frac{C_2}{e} = -1$ donne $C_2 = e$, puis $f(1) = C_1 + 1 = 1$ donne $C_1 = 0$: $f(x) = e^{1-x}$.
- f) $r^2 - 5r + 4 = (r-1)(r-4) : f = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. La tangente en A est parallèle à $y = 5x : f'(0) = 5$. $C_1 + C_2 = 2$ et $C_1 + 4C_2 = 5 : C_2 = 1, C_1 = 1$: $f(x) = e^x + e^{4x}$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3) : y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Les conditions donnent $C_1 + C_2 = -2$ et $C_1 + 3C_2 = 0$, d'où $C_2 = 1, C_1 = -3$ et $f(x) = e^{3x} - 3e^x$.
2. En $-\infty : e^{3x} \rightarrow 0$ et $e^x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: la droite $y = 0$ est asymptote à C_f en $-\infty$.
- En $+\infty : f(x) = e^{3x}(1 - 3e^{-2x}) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 3 \frac{e^{3x}}{3x}(1 - 3e^{-2x}) \rightarrow +\infty$ ($\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$) : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
3. $f'(x) = 3e^{3x} - 3e^x = 3e^x(e^{2x} - 1)$, du signe de $e^{2x} - 1$: négatif si $x < 0$, positif si $x > 0$; $f(0) = -2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

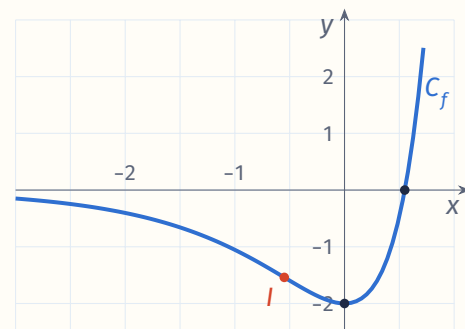
Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = -2 : f(x) \geq -2$ pour tout réel x .

4. $f(x) = e^x(e^{2x} - 3) = 0 \iff e^{2x} = 3 \iff x = \frac{\ln 3}{2}$. $f(x)$ a le signe de $e^{2x} - 3$: $f(x) < 0$ si $x < \frac{\ln 3}{2}$, $f(x) > 0$ si $x > \frac{\ln 3}{2}$.
5. $f''(x) = 9e^{3x} - 3e^x = 3e^x(3e^{2x} - 1)$ s'annule en changeant de signe pour $e^{2x} = \frac{1}{3}$, soit $x_0 = -\frac{\ln 3}{2}$.
Avec $e^{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} : f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$, d'où $I\left(-\frac{\ln 3}{2}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right) \approx (-0,55; -1,54)$.

6. **Nombre de solutions de $f(x) = m$** (lecture du tableau : sur $]-\infty, 0]$, f décroît de 0 (non atteint) à -2 ; sur $[0, +\infty[$, elle croît de -2 à $+\infty$) :

- $m < -2$: aucune solution ;
- $m = -2$: une solution ($x = 0$) ;
- $-2 < m < 0$: deux solutions ;
- $m \geq 0$: une solution.

(Avec $X = e^x > 0$, on a $f(x) = X^3 - 3X$: l'étude rappelle celle d'un polynôme de degré 3.)



■ Corrigé de l'exercice 46

- $r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3)$: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- $f'' = -f' + 6f$ est dérivable (car f et f' le sont) : f est trois fois dérivable, et en dérivant (E) : $(f'')' + (f')' - 6f' = (f'' + f' - 6f)' = 0$: f' est solution.
Pour $k(x) = f(x + 1)$: $k'(x) = f'(x + 1)$ et $k''(x) = f''(x + 1)$, donc
 $k''(x) + k'(x) - 6k(x) = f''(x + 1) + f'(x + 1) - 6f(x + 1) = 0$ ((E) appliquée au point $x + 1$) : k est solution.
- On écrit $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.
 - Sur $[0, +\infty[$, $|C_2 e^{-3x}| \leq |C_2|$. Si $C_1 \neq 0$, $f(x) = e^{2x} (C_1 + C_2 e^{-5x})$ tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$. Donc :
 $f(x) = C_2 e^{-3x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.
 - Si $C_2 \neq 0$, $f(x) = e^{-3x} (C_2 + C_1 e^{5x})$ tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$; si $C_2 = 0$, $f(x) \rightarrow 0$. Donc :
 $f(x) = C_1 e^{2x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.
 - D'après a) et b), il faut $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$: seule la **fonction nulle** est bornée sur $\mathbb{R}$.
 - $f'(x) - 2f(x) = -3C_2 e^{-3x} - 2C_2 e^{-3x} = -5C_2 e^{-3x}$ est nulle pour tout x si et seulement si $C_2 = 0$:
 $f(x) = C_1 e^{2x}$.
 - $f(x) e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-5x} \rightarrow C_1$ en $+\infty$, donc $C_1 = 1$; puis $f(0) = 1 + C_2 = 0$: $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$.
- $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$, donc $g''(x) - g'(x) - 6g(x) = f''(-x) + f'(-x) - 6f(-x) = 0$.
Si f est une solution paire, alors $g = f$: f est solution de (E) et de (E'). En soustrayant :
 $(f'' + f' - 6f) - (f'' - f' - 6f) = 2f' = 0$. Donc $f' = 0$, puis $f'' = 0$, et (E) donne $-6f = 0$: $f = 0$.
Réciproquement, la fonction nulle est une solution paire.

■ Corrigé de l'exercice 47

- $h''(x) + h'(x) - 2h(x) = 0 + a - 2ax - 2b = -2ax + (a - 2b)$. On veut $-2a = -2$ et $a - 2b = 3$: $a = 1$, $b = -1$, $h(x) = x - 1$.
 - Comme $h'' + h' - 2h = -2x + 3$: $f'' + f' - 2f = -2x + 3 \iff f'' + f' - 2f = h'' + h' - 2h \iff (f - h)'' + (f - h)' - 2(f - h) = 0$.
(E₀) : $r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$, solutions $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Les solutions de (E₁) sont donc
 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x - 1$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
 - $f(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0$ et $f'(0) = C_1 - 2C_2 + 1 = 0$: $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 - 2C_2 = -1$, d'où $C_2 = \frac{2}{3}$, $C_1 = \frac{1}{3}$:
 $f(x) = \frac{e^x + 2e^{-2x}}{3} + x - 1$.
- $(ae^x)'' + 4(ae^x)' + 3ae^x = 8ae^x = 8e^x$: $a = 1$. $r^2 + 4r + 3 = (r + 1)(r + 3)$, d'où les solutions
 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + e^x$.
 $f(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1$ et $f'(0) = -C_1 - 3C_2 + 1 = 1$: $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + 3C_2 = 0$, donc $C_1 = C_2 = 0$:
 $f(x) = e^x$ (la solution particulière elle-même : elle vérifie les deux conditions, et la solution est unique).

3. a) Pour $h(x) = a \cos x + b \sin x$, on a $h'' = -h$, donc $h'' + 2h' + h = 2h' = -2a \sin x + 2b \cos x$. On veut $-2a = 0$ et $2b = 2$: $h(x) = \sin x$.

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 : \text{les solutions de } (E_3) \text{ sont } \boxed{y = (C_1 x + C_2) e^{-x} + \sin x}.$$

b) $f(x) - \sin x = C_1 x e^{-x} + C_2 e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (car $x e^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$). Quelles que soient les conditions initiales, le terme $(C_1 x + C_2) e^{-x}$ (**régime transitoire**) s'éteint, et toute solution finit par osciller comme $\sin x$ (**régime permanent**).

■ Corrigé de l'exercice 48

- g est dérivable et $g' = f'' - r_1 f'$. Donc $g' - r_2 g = f'' - r_1 f' - r_2 f' + r_1 r_2 f = f'' - (r_1 + r_2) f' + r_1 r_2 f = f'' + a f' + b f$.
- f est solution de $(E) \iff g' = r_2 g \iff$ il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = K e^{r_2 x}$ (solutions de $y' = ay$, valable aussi si $r_2 = 0$) $\iff f' - r_1 f = K e^{r_2 x}$.
- Soit $u(x) = \frac{K}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}$: $u'(x) - r_1 u(x) = \frac{K}{r_2 - r_1} (r_2 - r_1) e^{r_2 x} = K e^{r_2 x}$ ✓
Alors $f' - r_1 f = K e^{r_2 x} \iff (f - u)' = r_1 (f - u) \iff f(x) = C_1 e^{r_1 x} + \frac{K}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.
Quand K décrit $\mathbb{R}$, $C_2 = \frac{K}{r_2 - r_1}$ décrit aussi $\mathbb{R}$: les solutions de (E) sont les $\boxed{x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$.
- $z'(x) = (f'(x) - r f(x)) e^{-rx}$; comme $e^{-rx} \neq 0$: $f' - r f = K e^{rx} \iff z' = K e^{rx} e^{-rx} = K$.
Or $z' = K \iff z(x) = Kx + D$, $D \in \mathbb{R}$, d'où $f(x) = z(x) e^{rx} = (Kx + D) e^{rx}$: les solutions de (E) sont les $\boxed{x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{rx}}$.
- $g' = g$ et $g(0) = 2$: $\boxed{g(x) = 2e^x}$. Puis $f' - f = 2e^x$: avec $z(x) = f(x) e^{-x}$, $z' = (f' - f) e^{-x} = 2$, donc $z(x) = 2x + D$, et $f(0) = D = 1$: $\boxed{f(x) = (2x + 1) e^x}$.
($g = f' - f$ vérifie $g' = g$: f est la solution de $y'' - 2y' + y = 0$, cas $\Delta = 0$ avec $r = 1$, telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.)

30 Corrigés : oscillations ($\Delta < 0$)

■ Corrigé de l'exercice 49

- Pour une équation caractéristique $ar^2 + \beta r + \gamma = 0$ de discriminant $\Delta < 0$, les racines sont $p \pm iq = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
 - $9r^2 + 1 = 0 \iff r^2 = -\frac{1}{9} \iff r = \pm \frac{i}{3}$ ($p = 0$, $q = \frac{1}{3}$) : $\boxed{y = C_1 \cos \frac{x}{3} + C_2 \sin \frac{x}{3}}$.
 - $2r^2 + 3 = 0 \iff r = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm i \frac{\sqrt{6}}{2}$: $\boxed{y = C_1 \cos \frac{\sqrt{6}x}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{6}x}{2}}$.
 - $r^2 - 6r + 10 = 0$: $\Delta = 36 - 40 = -4$, $r = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$: $\boxed{y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$.
 - $r^2 + r + 1 = 0$: $\Delta = -3$, $r = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\boxed{y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)}$.
 - $4r^2 + 4r + 5 = 0$: $\Delta = 16 - 80 = -64$, $r = \frac{-4 \pm 8i}{8} = -\frac{1}{2} \pm i$: $\boxed{y = e^{-\frac{x}{2}} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$.

f) $y'' - 4y' + 13y = 0$: $\Delta = 16 - 52 = -36$, $r = 2 \pm 3i$: $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2. Pour $y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$: $y(0) = C_1$ et $y'(0) = pC_1 + qC_2$.

c) $f(0) = C_1 = 1$ et $f'(0) = 3C_1 + C_2 = 0$, donc $C_2 = -3$: $f(x) = e^{3x} (\cos x - 3 \sin x)$.

d) $g(0) = C_1 = 0$ et $g'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = \sqrt{3}$, donc $C_2 = 2$: $g(x) = 2e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. $r^2 + 16 = 0 \iff r = \pm 4i$: les solutions sont $x \mapsto C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$. $f(0) = C_1 = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 4C_2 = 4$: $f(x) = \sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x$.

2. $R = \sqrt{3+1} = 2$ et $f(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right) = 2 \left(\cos 4x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 4x \sin \frac{\pi}{6} \right)$, d'où

$$f(x) = 2 \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) \quad (\varphi = -\frac{\pi}{6}).$$

Amplitude $\boxed{2}$, période $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Le maximum 2 est atteint quand $4x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$; dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $x = \frac{\pi}{24}$.

3. $f(x) = \sqrt{2} \iff \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \iff 4x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}$.

Dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $S = \left\{ \frac{5\pi}{48}, \frac{23\pi}{48} \right\}$.

4. $g''(x) = -16 \times 3 \cos \left(4x + \frac{2\pi}{3} \right) = -16g(x)$: g est solution. En développant :

$$g(x) = 3 \left(\cos 4x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin 4x \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{3}{2} \cos 4x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin 4x,$$

puis $g(0) = -\frac{3}{2}$ et $g'(0) = 4 \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = -6\sqrt{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 51

1. $r^2 + 2r + 10 = 0$: $\Delta = -36$, $r = -1 \pm 3i$. Solutions : $x \mapsto e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. $f(0) = C_1 = 0$ et $f'(0) = -C_1 + 3C_2 = 3$, donc

$$f(x) = e^{-x} \sin 3x \quad \text{et la tangente en } O \text{ est } y = 3x.$$

2. $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Comme $e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, les gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. Pour $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$:

• $f(x) = 0 \iff \sin 3x = 0 \iff x = k\frac{\pi}{3}$: C_f coupe l'axe des abscisses tous les $\frac{\pi}{3}$.

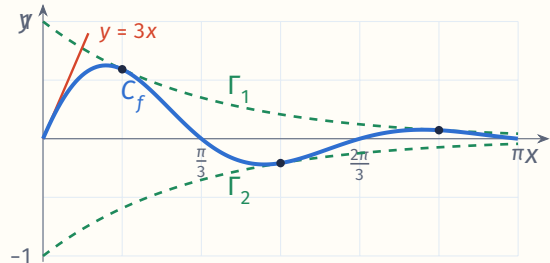
• $f(x) = e^{-x} \iff \sin 3x = 1 \iff x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.

$$\bullet f(x) = -e^{-x} \iff \sin 3x = -1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}.$$

C_f reste entre Γ_2 et Γ_1 et les touche en ces points. Comme $f'(x) = e^{-x}(3 \cos 3x - \sin 3x)$, en un point où $\sin 3x = 1$ (donc $\cos 3x = 0$) on a $f'(x) = -e^{-x}$: même pente que Γ_1 , les courbes y sont **tangentes** (de même pour Γ_2).

$$\begin{aligned} 4. f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= e^{-x - \frac{2\pi}{3}} \sin(3x + 2\pi) \\ &= e^{-\frac{2\pi}{3}} e^{-x} \sin 3x = e^{-\frac{2\pi}{3}} f(x). \end{aligned}$$

Tous les $\frac{2\pi}{3}$ (la **pseudo-période**), la courbe reprend la même forme, mais avec des ordonnées multipliées par $e^{-\frac{2\pi}{3}} \approx 0,12$: l'oscillation s'amortit très vite.



5. Voir la figure ci-dessus (points de contact avec Γ_1 et Γ_2 marqués).

■ Corrigé de l'exercice 52

1. Entre le maximum (en 1) et le minimum suivant (en 4), il s'écoule une demi-période : $T = 6$.

Donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$ et $(E) : y'' + \frac{\pi^2}{9} y = 0$.

2. R est le maximum de f : $R = 2$. $f(1) = 2 \iff \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1 \iff \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, et dans $]-\pi, \pi]$: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Contrôle : $f(0) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ✓. Puis

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(\cos \frac{\pi x}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi x}{3} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi x}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{3}.$$

3. $f'(x) = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi x}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \cos \frac{\pi x}{3}$, donc $f'(0) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ et la tangente en A est $y = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} x + 1$.

4. $f(x) = 1 \iff \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff \frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff x = 2 + 6k$ ou $x = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dans $[0, 6]$: $S = \{0, 2, 6\}$. Sur la figure, la droite $y = 1$ coupe bien C_f en A, en $x = 2$ et en $x = 6$.

5. Pour tout réel x : $f(2 - x) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi x}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$ (le cosinus est pair). Les points d'abscisses x et $2 - x$ (symétriques par rapport à 1) ont même ordonnée : la droite $x = 1$ est un **axe de symétrie** de C_f .

6. $h(x) = C_1 \cos \frac{\pi x}{3} + C_2 \sin \frac{\pi x}{3}$; $h(0) = C_1 = 0$ et $h(1) = C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, donc $h(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{3}$. Alors

$$h\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi x}{3}\right) = f(x).$$

C_f est l'image de la courbe de h par la **translation** de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}$: un « déphasage » est un décalage horizontal.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. La somme des racines vaut $2p = -a$ et leur produit $(p + iq)(p - iq) = p^2 + q^2 = b$. Comme $f(x) = z(x)e^{px}$:

$$f' = (z' + pz)e^{px}, \quad f'' = (z'' + 2pz' + p^2z)e^{px},$$

$$f'' + af' + bf = (z'' + (2p + a)z' + (p^2 + ap + b)z)e^{px} = (z'' + q^2z)e^{px},$$

car $2p + a = 0$ et $p^2 + ap + b = p^2 - 2p^2 + p^2 + q^2 = q^2$.

2. $e^{px} \neq 0$, donc f est solution $\iff z'' + q^2z = 0 \iff z(x) = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx$ (cours, avec $\omega = q > 0$). Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$: on a **démontré** le théorème du cas $\Delta < 0$.

3. Si $\Delta = 0$: $b = \frac{a^2}{4} = p^2$ et $a = -2p$, donc $2p + a = 0$ et $p^2 + ap + b = 0$: l'égalité devient $f'' + af' + bf = z'' e^{px}$. Ainsi f est solution $\iff z'' = 0 \iff z'$ est constante $\iff z(x) = C_1x + C_2$, soit $f(x) = (C_1x + C_2)e^{px}$, avec p la racine double : c'est le cas $\Delta = 0$ du cours.

4. $r^2 + 4r + 5 = 0$: $\Delta = -4$, $r = -2 \pm i$, donc $p = -2$, $q = 1$ et $z = f e^{2x} = f e^{-px}$. D'après la partie A :

$$f'' + 4f' + 5f = (z'' + z)e^{-2x}.$$

Donc f est solution de (E) $\iff (z'' + z)e^{-2x} = e^{-2x} \cos x \iff z'' + z = \cos x$.

5. $u'(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$, $u''(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x = \cos x - u(x)$: $u'' + u = \cos x$ ✓.

Alors $z'' + z = \cos x \iff (z - u)'' + (z - u) = 0 \iff z - u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Solutions de (E) :

$$f(x) = e^{-2x} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Une solution de la forme $e^{-2x}(\alpha \cos x + \beta \sin x)$ est impossible : elle est solution de l'équation homogène, comme dans la résonance.

6. $z(0) = f(0) = 0$ et $z' = (f' + 2f)e^{2x}$, donc $z'(0) = 0$. Or $z(0) = C_1$ et $z'(0) = C_2$ (car $u(0) = u'(0) = 0$) : $C_1 = C_2 = 0$ et

$$f(x) = \frac{x}{2} e^{-2x} \sin x.$$

Pour $x \geq 0$: $|f(x)| \leq \varphi(x) = \frac{x}{2} e^{-2x}$, avec $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1 - 2x)e^{-2x}$: φ croît sur $[0, \frac{1}{2}]$, décroît ensuite,

et son maximum vaut $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{-1}$. Donc $|f(x)| \leq \frac{1}{4e}$. Enfin $xe^{-2x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (croissances comparées), et les gendarmes donnent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $r^2 + 4r + 20 = 0$: $\Delta = -64$, $r = -2 \pm 4i$. Les solutions de (H) sont $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$, et $|y(x)| \leq (|C_1| + |C_2|)e^{-2x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

2. $p'' = -\omega^2 p$ et $p'(x) = -\alpha\omega \sin \omega x + \beta\omega \cos \omega x$, donc

$$p'' + 4p' + 20p = ((20 - \omega^2)\alpha + 4\omega\beta) \cos \omega x + ((20 - \omega^2)\beta - 4\omega\alpha) \sin \omega x.$$

Si p est solution, $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2\omega}$ donnent les deux égalités (notées L_1 et L_2) ; réciproquement, elles suffisent. On résout : $(20 - \omega^2)L_1 - 4\omega L_2$ donne $D(\omega)\alpha = 16(20 - \omega^2)$, et $4\omega L_1 + (20 - \omega^2)L_2$ donne $D(\omega)\beta = 64\omega$. Comme $D(\omega) \geq 16\omega^2 > 0$:

$$\alpha = \frac{16(20 - \omega^2)}{D(\omega)}, \quad \beta = \frac{64\omega}{D(\omega)}.$$

3. Si f est solution de (E_ω) , alors $(f - p)'' + 4(f - p)' + 20(f - p) = 16 \cos \omega x - 16 \cos \omega x = 0$: $f - p$ est solution de (H) , donc tend vers 0 d'après 1. Quelles que soient les conditions initiales, f « oublie » son départ et se rapproche de p .

$$4. \alpha^2 + \beta^2 = \frac{256(20 - \omega^2)^2 + 4096 \omega^2}{D(\omega)^2} = \frac{256 D(\omega)}{D(\omega)^2} = \frac{256}{D(\omega)}.$$

Posons $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{16}{\sqrt{D(\omega)}}$. Comme $\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{A}\right)^2 = 1$, il existe un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{\alpha}{A}$ et

$\sin \varphi = \frac{\beta}{A}$; alors $p(x) = A(\cos \varphi \cos \omega x + \sin \varphi \sin \omega x) = A \cos(\omega x - \varphi)$.

$$5. D(\omega) = \omega^4 - 40\omega^2 + 400 + 16\omega^2 = \omega^4 - 24\omega^2 + 400 = (\omega^2 - 12)^2 + 256.$$

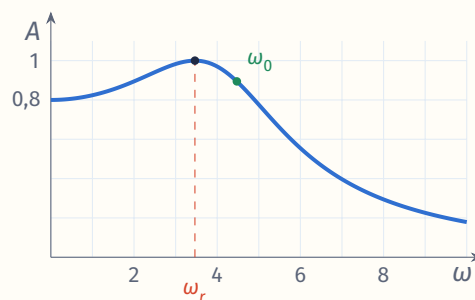
• Sur $]0, 2\sqrt{3}]$, $\omega^2 - 12$ croît de -12 à 0 : D décroît, donc A **croît**.

• Sur $[2\sqrt{3}, +\infty[$, D croît : A **décroît**.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{16}{\sqrt{400}} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} A(\omega) = 0.$$

Résonance pour $\omega_r = 2\sqrt{3} \approx 3,46$, avec $A(\omega_r) = \frac{16}{16} =$

1. On a $\omega_r < \omega_0 = 2\sqrt{5} \approx 4,47$: avec frottement, la résonance a lieu **avant** la pulsation propre ($A(\omega_0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89$).



$$6. \text{ Pour } \omega = 2\sqrt{3} : D = 256, \alpha = \frac{16 \times 8}{256} = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{64 \times 2\sqrt{3}}{256} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ d'où}$$

$$p(x) = \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\sqrt{3}x) = \cos\left(2\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3}\right).$$

31

Corrigés : modélisation

■ Corrigé de l'exercice 55

$$1. \tau = \frac{0,2}{40} = 5 \times 10^{-3} \text{ s} = 5 \text{ ms}. \text{ En divisant par } L : i' = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}, \text{ soit } i' = -200i + 60 \quad \left(\frac{R}{L} = 200 \text{ s}^{-1}\right).$$

$$2. \text{ Les solutions sont } i(t) = Ce^{-200t} - \frac{60}{-200} = Ce^{-200t} + 0,3, \text{ et } i(0) = C + 0,3 = 0 \text{ donne } C = -0,3 :$$

$$i(t) = 0,3(1 - e^{-200t}) \text{ A} \quad \text{et} \quad I_\infty = 0,3 \text{ A} = \frac{12}{40} = \frac{E}{R}.$$

En régime permanent, i est constante, donc $u_L = L i' = 0$: la bobine se comporte comme un simple fil.

$$3. i(t) = 0,95 I_\infty \iff e^{-200t} = 0,05 \iff t = \frac{\ln 20}{200} \approx 0,015 \text{ s}, \text{ soit } t = \tau \ln 20 \approx 3\tau.$$

$$4. i'(t) = 0,3 \times 200 e^{-200t} = 60 e^{-200t}, \text{ donc } u_L(t) = 12 e^{-200t} \text{ V} : u_L(0) = 12 \text{ V} = E, u_L(\tau) = 12 e^{-1} \approx 4,41 \text{ V}, \text{ et } u_L(t) \rightarrow 0.$$

$$\text{Contrôle : } u_L + Ri = 12e^{-200t} + 12(1 - e^{-200t}) = 12 = E \checkmark.$$

■ Corrigé de l'exercice 56

- $c' = -kc$, donc $c(t) = c_0 e^{-kt}$. $c(10) = 0,045 \iff e^{-10k} = \frac{0,045}{0,060} = \frac{3}{4} \iff k = \frac{1}{10} \ln \frac{4}{3} \approx 0,0288 \text{ min}^{-1}$.
- $c(t_{1/2}) = \frac{c_0}{2} \iff e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2} \iff -kt_{1/2} = -\ln 2 \iff t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{10 \ln 2}{\ln \frac{4}{3}} \approx 24,1 \text{ min}$
(indépendant de c_0).
- Il reste 10 % de c_0 : $e^{-kt} = 0,1 \iff t = \frac{\ln 10}{k} = \frac{10 \ln 10}{\ln \frac{4}{3}} \approx 80,0 \text{ min}$.
- $v(t) = -c'(t) = k c(t) = k c_0 e^{-kt}$, donc $v(0) = k c_0 \approx 0,0288 \times 0,060 \approx 1,73 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.
 $v(t + t_{1/2}) = k c_0 e^{-kt} e^{-kt_{1/2}} = v(t) \times \frac{1}{2}$: la vitesse est divisée par 2 à chaque demi-réaction.
- $c(t) \rightarrow 0$, donc la concentration en dioxygène tend vers $\frac{c_0}{2} = 0,030 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$: la réaction est totale.

■ Corrigé de l'exercice 57

- $Q' = -0,2 Q + 4$: $Q(t) = C e^{-0,2t} + \frac{4}{0,2} = C e^{-0,2t} + 20$, et $Q(0) = 0$ donne $C = -20$:
 $Q(t) = 20(1 - e^{-0,2t})$ et $Q_\infty = 20 \text{ mg}$.
 $Q(t) \geq 18 \iff e^{-0,2t} \leq 0,1 \iff t \geq 5 \ln 10 \approx 11,5 \text{ h}$.
- $Q(t) \geq 12 \iff e^{-0,2t} \leq 0,4 \iff t \geq 5 \ln \frac{5}{2} \approx 4,58 \text{ h}$, soit environ 4 h 35 min (et $Q < 20$: jamais toxique).
- $Q(t) = C e^{-0,2t} + 20$ avec $Q(0) = C + 20 = Q_0$: $Q(t) = 20 + (Q_0 - 20) e^{-0,2t}$.
Comme $0 < e^{-0,2t} \leq 1$, le terme $(Q_0 - 20) e^{-0,2t}$ est compris entre 0 et $Q_0 - 20$: $Q(t)$ reste **entre** Q_0 et 20. Si $12 \leq Q_0 \leq 25$, ces deux nombres sont dans $[12, 25]$, donc $12 \leq Q(t) \leq 25$ pour tout $t \geq 0$: efficace dès le début, jamais toxique.
Si $Q_0 = 20$: $Q(t) = 20$ pour tout t . On atteint le plateau **immédiatement** (c'est la « dose de charge »).
- Pour $t \geq 24$: Q est solution de $Q' = -0,2 Q$ avec $Q(24) = 20$, donc $Q(t) = 20 e^{-0,2(t-24)}$ et
 $Q(t) \geq 12 \iff e^{-0,2(t-24)} \geq 0,6 \iff t - 24 \leq 5 \ln \frac{5}{3} \approx 2,55$.

Le médicament reste efficace environ **2 h 33 min** après l'arrêt.

■ Corrigé de l'exercice 58

- $0,5 x'' + 25 x = 0 \iff x'' + 50x = 0$: $\omega_0 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi\sqrt{2}}{5} \approx 0,89 \text{ s}$.
- En divisant par m : $x'' + 2h x' + 50x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 2hr + 50 = 0$, de discriminant $\Delta = 4h^2 - 200$. $\Delta < 0 \iff h^2 < 50 \iff h < 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ (car $h \geq 0$).
- $x'' + 2x' + 50x = 0$: $\Delta = -196 = -14^2$, $r = -1 \pm 7i$, donc $x(t) = e^{-t}(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t)$. $x(0) = C_1 = 0$ et $x'(0) = -C_1 + 7C_2 = 0,35$, donc $C_2 = 0,05$:
 $x(t) = 0,05 e^{-t} \sin 7t$ (en m).

4. $x(t+T) = 0,05 e^{-t-T} \sin(7t+2\pi) = e^{-T} x(t)$. À chaque pseudo-période ($T \approx 0,90$ s), l'élongation est multipliée par $e^{-\frac{2\pi}{T}} \approx \boxed{0,41}$: les oscillations s'amortissent géométriquement.
5. $|\sin 7t| \leq 1$, donc $|x(t)| \leq 0,05 e^{-t}$. Or $0,05 e^{-t} \leq 0,001 \iff e^{-t} \leq 0,02 \iff t \geq \ln 50$. À partir de $t = \ln 50 \approx \boxed{3,91}$ s, on est sûr que $|x(t)| \leq 1$ mm.

■ Corrigé de l'exercice 59

1. $N_X(t) = N_0 e^{-0,1t}$; demi-vie : $e^{-0,1T} = \frac{1}{2} \iff T = 10 \ln 2 \approx \boxed{6,93}$ jours.
2. $N'_Y + 0,3 N_Y = \lambda_X N_X = 0,1 N_0 e^{-0,1t}$: N_Y est solution de (E). Avec $h(t) = c e^{-0,1t}$: $h' + 0,3h = 0,2 c e^{-0,1t}$, donc h est solution si et seulement si $\boxed{c = \frac{N_0}{2}}$.

y est solution de (E) $\iff (y-h)' = -0,3(y-h) \iff y(t) = C e^{-0,3t} + \frac{N_0}{2} e^{-0,1t}$. $N_Y(0) = 0$ donne $C = -\frac{N_0}{2}$:

$$\boxed{N_Y(t) = \frac{N_0}{2} (e^{-0,1t} - e^{-0,3t})}.$$

3. $N'_Y(t) = \frac{N_0}{2} (-0,1 e^{-0,1t} + 0,3 e^{-0,3t}) = \frac{N_0}{20} e^{-0,3t} (3 - e^{0,2t})$, positif si et seulement si $e^{0,2t} < 3$, soit $t < 5 \ln 3$.

N_Y croît sur $[0, 5 \ln 3]$, décroît ensuite, et tend vers 0 : maximum en $\boxed{t_m = 5 \ln 3 \approx 5,5}$ jours.

Comme $e^{-0,1t_m} = e^{-\frac{1}{2} \ln 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $e^{-0,3t_m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$:

$$N_Y(t_m) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{N_0}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{N_0}{3\sqrt{3}} \approx 0,19 N_0}.$$

4. $\frac{N_Y(t)}{N_X(t)} = \frac{1}{2} (1 - e^{-0,2t}) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$. Au bout de quelques semaines, il y a environ un noyau Y pour deux noyaux X : Y disparaît au rythme où X le produit (« équilibre de régime »), et les deux décroissent ensemble à la vitesse de X.
5. L'équation devient $N'_Y + \lambda N_Y = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$. Pour $c e^{-\lambda t}$: $-\lambda c e^{-\lambda t} + \lambda c e^{-\lambda t} = 0 \neq \lambda N_0 e^{-\lambda t}$: impossible ($e^{-\lambda t}$ est solution de l'équation sans second membre). Pour $g(t) = a t e^{-\lambda t}$:

$$g'(t) + \lambda g(t) = a e^{-\lambda t} - \lambda a t e^{-\lambda t} + \lambda a t e^{-\lambda t} = a e^{-\lambda t}, \quad \text{donc } a = \lambda N_0.$$

Puis $N_Y(t) = C e^{-\lambda t} + \lambda N_0 t e^{-\lambda t}$ et $N_Y(0) = 0$ donne $C = 0$: $\boxed{N_Y(t) = \lambda N_0 t e^{-\lambda t}}$.

$N'_Y(t) = \lambda N_0 (1 - \lambda t) e^{-\lambda t}$: maximum en $t = \frac{1}{\lambda}$, égal à $\boxed{\frac{N_0}{e} \approx 0,37 N_0}$.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. Période $\frac{2\pi}{\omega} = \boxed{24 \text{ h}}$; T_e varie entre $\boxed{5^\circ \text{C}}$ (à $t = 12$ h) et $\boxed{15^\circ \text{C}}$ (à $t = 0, 24$ h, ...).
2. (E) $\iff \theta' + k\theta = 10k + 5k \cos \omega t$. Pour θ_p :

$$\theta'_p + k\theta_p = 10k + (k\alpha + \omega\beta) \cos \omega t + (k\beta - \omega\alpha) \sin \omega t.$$

θ_p est solution si et seulement si $k\alpha + \omega\beta = 5k$ et $k\beta - \omega\alpha = 0$ (prendre $t = 0$, puis $t = 6$ où

$\omega t = \frac{\pi}{2}$). Avec $k = \omega$: $\alpha + \beta = 5$ et $\beta = \alpha$, donc $\boxed{\alpha = \beta = \frac{5}{2}}$.

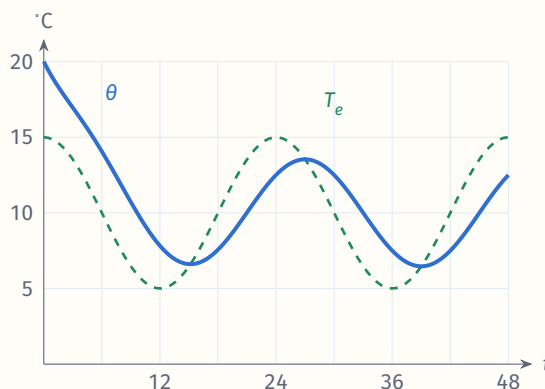
3. $\theta' + k\theta - (\theta_p' + k\theta_p) = kT_e - kT_e = 0 \iff (\theta - \theta_p)' = -k(\theta - \theta_p)$. Donc $\theta(t) = \theta_p(t) + Ce^{-kt}$, et $\theta(0) = 10 + \frac{5}{2} + C = 20$ donne $C = \frac{15}{2}$:

$$\theta(t) = 10 + \frac{5}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t) + \frac{15}{2} e^{-\frac{\pi}{12}t}.$$

4. $\theta(t) - \theta_p(t) = \frac{15}{2} e^{-\frac{\pi}{12}t} \rightarrow 0$, et $\frac{15}{2} e^{-\frac{\pi}{12}t} \leq 0,5 \iff e^{-\frac{\pi}{12}t} \leq \frac{1}{15} \iff t \geq \frac{12}{\pi} \ln 15 \approx \boxed{10,3 \text{ h}}$.

$$\cos \omega t + \sin \omega t = \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ donc } \theta_p(t) = 10 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ avec } \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54.$$

Après une journée, la maison oscille entre $\boxed{6,5^\circ\text{C}}$ et $\boxed{13,5^\circ\text{C}}$ environ. Son maximum est atteint quand $\omega t - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$, soit $t = 3 + 24n$: **trois heures après** le maximum extérieur ($\frac{\pi/4}{\omega} = 3$). Les murs « amortissent » et « retardent » les variations extérieures.



5. Le calcul de la question 2 avec k quelconque donne $\beta = \frac{\omega}{k}\alpha$, puis $\alpha\left(k + \frac{\omega^2}{k}\right) = 5k$:

$$\alpha = \frac{5k^2}{k^2 + \omega^2}, \quad \beta = \frac{5k\omega}{k^2 + \omega^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{25k^2(k^2 + \omega^2)}{(k^2 + \omega^2)^2}, \quad A(k) = \frac{5k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}.$$

$A(k) = \frac{5}{\sqrt{1 + \omega^2/k^2}}$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$ (quand k croît, $\frac{\omega^2}{k^2}$ décroît), de limite 0 en 0 et 5 en $+\infty$; pour $k = \omega$, on retrouve $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Mieux isolée (k petit), la maison subit des variations de température **plus faibles** ; sans isolation (k très grand), elle suit l'extérieur.

32

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1. Avec $y = 0$: $2f(x) = 2f(x)f(0)$ pour tout x . En choisissant x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, on obtient $\boxed{f(0) = 1}$.
Avec $x = 0$: $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y)$: f est **paire**. En dérivant $f(-y) = f(y)$: $-f'(-y) = f'(y)$, et pour $y = 0$: $-f'(0) = f'(0)$, soit $\boxed{f'(0) = 0}$.
2. À x fixé, on dérive deux fois par rapport à y les deux membres de (D) :

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y), \quad f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Pour $y = 0$: $2f''(x) = 2f(x)f''(0)$, soit $\boxed{f'' = kf''}$ avec $k = f''(0)$.

3. f est solution de $y'' - ky = 0$, avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

- $k = -\omega^2 < 0$: $y'' + \omega^2 y = 0$, $f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$; $f(0) = A = 1$, $f'(0) = B\omega = 0$: $\boxed{f(x) = \cos \omega x}$.
- $k = 0$: $f'' = 0$, $f(x) = Ax + B$ avec $B = 1$ et $A = f'(0) = 0$: $\boxed{f(x) = 1}$.

- $k = \omega^2 > 0 : r^2 - \omega^2 = 0, r = \pm\omega, f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $A + B = 1$ et $\omega(A - B) = 0 :$

$$f(x) = \frac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}.$$

4. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ avec $a = \omega x, b = \omega y : \checkmark$. La constante 1 : $1 + 1 = 2 \times 1 \times 1$
 $\checkmark$. Enfin, avec $a = \omega x$ et $b = \omega y :$

$$2 \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} + \frac{e^{a-b} + e^{-(a-b)}}{2} \checkmark.$$

Les solutions bornées sont $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto 1$ (la troisième vérifie $f(x) \geq \frac{1}{2}e^{\omega x} \rightarrow +\infty$). Les deux dernières sont strictement positives ; $\cos \omega = 0 \iff \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$: les solutions qui

s'annulent en 1 sont les fonctions $x \mapsto \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right), n \in \mathbb{N}$.

5. En dérivant deux fois par rapport à $y : g''(x+y) + g''(x-y) = 0$, et pour $y = 0 : g''(x) = 0$. Donc $g(x) = ax + b$. Réciproquement, $a(x+y) + b + a(x-y) + b = 2(ax+b) \checkmark$. Les solutions sont les fonctions affines.

■ Corrigé de l'exercice 62

1. Les solutions sont $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$. Si $r_2 < 0$, alors $r_1 < r_2 < 0$ et les deux exponentielles tendent vers 0 : (E) est stable. Réciproquement, si (E) est stable, la solution $e^{r_2 x}$ tend vers 0, ce qui impose $r_2 < 0$ (sinon $e^{r_2 x} \geq 1$).

Enfin $r_1 < r_2 < 0 \iff r_1 r_2 > 0$ et $r_1 + r_2 < 0$ (deux réels de produit positif ont le même signe)
 $\iff b > 0$ et $a > 0$, car $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$.

2. **Cas $\Delta = 0 : r = -\frac{a}{2}$, solutions $(C_1 x + C_2) e^{rx}$.** Si $a > 0, r < 0$ et $x e^{rx} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : stable. Si $a \leq 0, r \geq 0$ et la solution $e^{rx} \geq 1$ ne tend pas vers 0.

Cas $\Delta < 0 : p = -\frac{a}{2}$; les solutions $e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ sont majorées en valeur absolue par $(|C_1| + |C_2|) e^{px}$. Si $a > 0, p < 0$: stable. Si $a \leq 0, p \geq 0$ et la solution $y = e^{px} \cos qx$ vérifie $y\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = e^{\frac{2n\pi p}{q}} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\frac{2n\pi}{q} \rightarrow +\infty$: elle ne tend pas vers 0.

3. Si $\Delta > 0$, c'est la question 1. Si $\Delta \leq 0$, alors $b \geq \frac{a^2}{4}$, donc « $a > 0$ » équivaut à « $a > 0$ et $b > 0$ ».
 Dans tous les cas : (E) stable $\iff a > 0$ et $b > 0$.

Application : $m - 1 > 0$ et $4 - m^2 > 0$, soit $1 < m < 2$.

4. Si $a = 0$ et $b > 0$: les solutions $C_1 \cos(\sqrt{b} x) + C_2 \sin(\sqrt{b} x)$ sont bornées par $|C_1| + |C_2|$.

Réciproquement, supposons toutes les solutions bornées sur $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta \geq 0$, il existe une racine réelle r et e^{rx} est solution ; elle est non bornée en $+\infty$ si $r > 0$, en $-\infty$ si $r < 0$. Donc $r = 0$, d'où $b = 0$; les racines sont alors 0 et $-a$. Si $a \neq 0, e^{-ax}$ n'est pas bornée ; si $a = 0, x \mapsto x$ est solution ($y'' = 0$) et n'est pas bornée. Contradiction : donc $\Delta < 0$.

- Si $\Delta < 0 : y = e^{px} \cos qx$ vaut $e^{\frac{2n\pi p}{q}}$ en $\frac{2n\pi}{q}$ ($n \in \mathbb{Z}$), quantité non bornée si $p \neq 0$ ($n \rightarrow +\infty$ si $p > 0, n \rightarrow -\infty$ si $p < 0$). Donc $p = 0$, soit $a = 0$, et $\Delta = -4b < 0$ donne $b > 0$.

Conclusion : toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R} \iff a = 0$ et $b > 0$ (oscillateur sans frottement).

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Avec $f(x) = 1 : g = x^\alpha$, $g'' + g = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + x^\alpha$, et $x^{\alpha-1}(0 + 0 + x) = x^\alpha$: il faut $\alpha(\alpha - 1) = 0$, soit $\alpha \in \{0, 1\}$.

Avec $f(x) = x : g = x^{\alpha+1}$, $g'' + g = (\alpha + 1)\alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha+1}$, et $x^{\alpha-1}(0 + 2 + x^2) = 2x^{\alpha-1} + x^{\alpha+1}$: il faut $\alpha(\alpha + 1) = 2$, soit $\alpha \in \{1, -2\}$. Donc nécessairement $\boxed{\alpha = 1}$.

Réciproquement, si $g = xf : g' = f + xf'$, $g'' = 2f' + xf''$, et $g'' + g = xf'' + 2f' + xf \checkmark$.

2. f est solution de (E) sur $I \iff g'' + g = 0 \iff g(x) = A \cos x + B \sin x$:

$$f(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0, mais si $A \neq 0$, $\frac{A \cos x}{x} \rightarrow \pm\infty$ en 0^+ (car $\cos x \rightarrow 1$). Les solutions ayant une limite finie en 0 sont donc $\boxed{x \mapsto B \frac{\sin x}{x}}$, de limite B .

3. Le même calcul donne $g'' - g = xf'' + 2f' - xf$, donc (F) $\iff g'' - g = 0 \iff g(x) = Ae^x + Be^{-x}$:

$$f(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x}. \text{ On écrit}$$

$$f(x) = \frac{A+B}{x} + A \frac{e^x - 1}{x} + B \frac{e^{-x} - 1}{x}, \quad \text{où } \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \text{ et } \frac{e^{-x} - 1}{x} \rightarrow -1 \text{ en } 0.$$

Limite finie en 0 si et seulement si $A + B = 0$: ce sont les fonctions $\boxed{x \mapsto A \frac{e^x - e^{-x}}{x}}$, de limite $2A$.

Une solution bornée sur I est bornée près de 0, donc (même calcul) $A + B = 0$; mais alors $f(x) = A \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ et $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ imposent $A = 0$. **Seule la fonction nulle** est bornée sur I .

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $u'' = x'' + y'' = -x - y = -u$ et $v'' = x'' - y'' = -3x + 3y = -3v$. $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, donc $u(t) = \cos t$; $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$, donc $v(t) = \cos(\sqrt{3}t)$. Puis $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$:

$$x(t) = \frac{\cos t + \cos \sqrt{3}t}{2}, \quad y(t) = \frac{\cos t - \cos \sqrt{3}t}{2}.$$

Réciproquement, ces fonctions vérifient le système : $x'' = \frac{-\cos t - 3 \cos \sqrt{3}t}{2} = -2x + y$, et de même pour y .

2. Avec $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ ($p = \sqrt{3}t$, $q = t$) : $x(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}t\right)$, et de même $y(t) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}t\right)$.

x oscille rapidement (pulsation $\frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1,37$) avec une amplitude $\left|\cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}t\right)\right|$ qui varie lentement : elle s'annule, puis renaît. Quand l'amplitude de x est nulle, celle de y est maximale : l'énergie passe d'un solide à l'autre.

3. Supposons x périodique de période $T > 0$. Alors $x(T) = x(0) = 1$, soit $\cos T + \cos \sqrt{3}T = 2$; comme chaque cosinus est ≤ 1 , $\cos T = 1$ et $\cos \sqrt{3}T = 1$: $T = 2k\pi$ et $\sqrt{3}T = 2m\pi$ avec $k, m \in \mathbb{N}^*$. Donc $\sqrt{3} = \frac{m}{k}$ serait rationnel.

Or si $\sqrt{3} = \frac{m}{k}$ (fraction irréductible), alors $m^2 = 3k^2$: 3 divise m^2 , donc m (si $m = 3j \pm 1$, $m^2 = 9j^2 \pm 6j + 1$ n'est pas multiple de 3) ; avec $m = 3m'$: $k^2 = 3m'^2$, donc 3 divise aussi k : contradiction. $\sqrt{3}$ est irrationnel et $\boxed{x \text{ n'est pas périodique}}$.

4. $x(0) = y(0) = 1 : u(0) = 2, v(0) = 0$, d'où $u = 2 \cos t, v = 0$ et $x = y = \cos t$: période 2π (les solides bougent ensemble).

$x(0) = 1, y(0) = -1 : u = 0, v = 2 \cos \sqrt{3}t$, d'où $x = \cos \sqrt{3}t, y = -\cos \sqrt{3}t$: période $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (mouvements opposés). Toute autre solution (avec vitesses nulles) est une combinaison de ces deux modes.

■ Corrigé de l'exercice 65

1. $(e^x f)' = e^x (f' + f) \leq 0 : e^x f$ décroît sur $[0, +\infty[$, donc $e^x f(x) \leq f(0)$, soit $f(x) \leq f(0) e^{-x}$.

2. $h_1 = e^{2x} f - e^x : h_1' = e^{2x} (f' + 2f) - e^x \leq e^{2x} e^{-x} - e^x = 0$, donc $h_1(x) \leq h_1(0) = 0$ et $f(x) \leq e^{-x}$.

$h_2 = e^{2x} f + e^x : h_2' = e^{2x} (f' + 2f) + e^x \geq -e^x + e^x = 0$, donc $h_2(x) \geq h_2(0) = 2$ et $f(x) \geq 2e^{-2x} - e^{-x}$.

Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. Sur $[A, +\infty[: (e^x (f - \varepsilon))' = e^x (f' + f - \varepsilon) \leq 0$, donc $e^x (f(x) - \varepsilon) \leq e^A (f(A) - \varepsilon)$, soit

$$f(x) \leq \varepsilon + (f(A) - \varepsilon) e^{A-x} \leq \varepsilon + f(A) e^{A-x}.$$

De même $(e^x (f + \varepsilon))' = e^x (f' + f + \varepsilon) \geq 0$ donne $f(x) \geq -\varepsilon + (f(A) + \varepsilon) e^{A-x} \geq -\varepsilon + f(A) e^{A-x}$. Ainsi $|f(x) - f(A) e^{A-x}| \leq \varepsilon$, d'où $|f(x)| \leq |f(A)| e^{A-x} + \varepsilon$.

Comme $e^{A-x} \rightarrow 0$, il existe $B \geq A$ tel que $|f(A)| e^{A-x} \leq \varepsilon$ pour $x \geq B$; alors $|f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \geq B$. ε étant arbitraire, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. a) $f(x) = e^x : f' - f = 0$ tend vers 0, mais $f \rightarrow +\infty$.

b) $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x}$, donc $f \rightarrow 0$. Mais $f'(x) = \frac{2x \cos(x^2)}{1+x} - \frac{\sin(x^2)}{(1+x)^2}$. Pour $x_n = \sqrt{2n\pi} : f'(x_n) + f(x_n) = \frac{2x_n}{1+x_n} \rightarrow 2$; pour $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi} : f'(y_n) + f(y_n) = -\frac{2y_n}{1+y_n} \rightarrow -2$. Donc $f' + f$ n'a pas de limite en $+\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. $g' - g = (f''' + f'' + f') - (f'' + f' + f) = f''' - f$. Donc $f''' = f \iff g' = g \iff g(x) = Ce^x$ ($C \in \mathbb{R}$)
 $\iff f'' + f' + f = Ce^x$.

2. $h = \frac{C}{3} e^x : h'' + h' + h = 3 \times \frac{C}{3} e^x = Ce^x$ ✓. Alors $f'' + f' + f = Ce^x \iff f - h$ est solution de $y'' + y' + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, de racines $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Avec $K = \frac{C}{3}$ (quelconque comme C) :

$$f(x) = Ke^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right), \quad K, A, B \in \mathbb{R}.$$

3. Pour $x \geq 0$, le second terme est borné par $|A| + |B|$. Si $K \neq 0$, $|f(x)| \geq |K| e^x - (|A| + |B|) \rightarrow +\infty$. Les solutions bornées sur $[0, +\infty[$ sont celles pour lesquelles $K = 0$.

Pour $e^{px} \cos qx$ et $e^{px} \sin qx$, les dérivées en 0 valent p et q , les dérivées secondes $p^2 - q^2$ et $2pq$; ici $p = -\frac{1}{2}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $p^2 - q^2 = -\frac{1}{2}$ et $2pq = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$K + A = 1, \quad K - \frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} B = 0, \quad K - \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} B = 0.$$

D'où $B = 0, K = \frac{A}{2}, A = \frac{2}{3}, K = \frac{1}{3}$ (solution unique) : $\varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

4. a) $u' = v$ est dérivable, $u'' = v' = w$ aussi, et $u''' = w' = u$: u est solution de (E) avec $u(0) = 1$, $u'(0) = v(0) = 0$, $u''(0) = w(0) = 0$. D'après 2, u est de la forme trouvée, et le système de 3 l'oblige à valoir φ .

$(u + v + w)' = v + w + u$, donc $u + v + w = Ce^x$ avec $C = u(0) + v(0) + w(0) = 1$: $\boxed{u + v + w = e^x}$.

- b) $S' = 2uv + 2vw + 2wu - (v^2 + uw) - (w^2 + vu) - (u^2 + wv) = uv + vw + wu - u^2 - v^2 - w^2 = -S$.

Donc $S = S(0)e^{-x} = e^{-x}$. En développant, $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, d'où

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)S = e^x \times e^{-x} = \boxed{1}.$$

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · L'équation $y' = ay + b$	31 à 36	/ 6	
Thème B · Équations avec second membre	37 à 42	/ 6	
Thème C · Équations du second ordre	43 à 48	/ 6	
Thème D · Oscillations ($\Delta < 0$)	49 à 54	/ 6	
Thème E · Modélisation (physique, chimie)	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Nombres complexes (partie 2)

Maths Olympiad