

Chapitre 4 : Les suites numériques

L'ESSENTIEL DU COURS ET MÉTHODES

Niveau : 2^{ème} BAC (PC/SVT/STE/STM)

f marocmaths

06 74 81 83 38

Version : 30 novembre 2025

1 Généralités sur les suites numériques (Rappels)

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$.

1.1 Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

DÉFINITION 1: Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) u_n \leq M$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

⚠ Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et son terme général u_n .
⚠ les réels M et m sont des constantes et ne dépendent pas de n .

Remarque :

S'il existe un réel $S \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n| \leq S$, alors la suite (u_n) est bornée.

Remarque : Suite périodique

Soit (u_n) une suite numérique et p de $\mathbb{N}^*$.

⊕ (u_n) est **périodique de période** p si et seulement si : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+p} = u_n$

⊕ Si (u_n) est une suite périodique de période p , alors : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}), u_{n+mp} = u_n$

1.2 Monotonie d'une suite numérique

DÉFINITION 2: Monotonie d'une suite numérique

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **croissante** si : $(\forall (n, m) \in I^2) ; n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **décroissante** si : $(\forall (n, m) \in I^2) ; n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m$

💡 Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
💡 Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

PROPOSITION 1: Monotonie d'une suite numérique

- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **croissante** si : $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **décroissante** si : $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **constante** si : $(\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

Soit (u_n) une suite numérique telle que : $(\forall n \in I) u_n > 0$.

⊕ (u_n) est **croissante** $\iff (\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

⊕ (u_n) est **décroissante** $\iff (\forall n \in I) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

1.3 Suite Arithmétique

DÉFINITION 3

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r (indépendant de n) est appelé le **raison** de la suite (u_n) .

💡 Monotonie d'une suite arithmétique :

- $r > 0 \Rightarrow (u_n)$ est croissante
- $r < 0 \Rightarrow (u_n)$ est décroissante

Remarque :

Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. (On montre par exemple que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$)

PROPOSITION 2: Propriété caractéristique d'une suite arithmétique

(u_n) est arithmétique $\iff (\forall n \in \mathbb{N}) ; 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$

💡 Trois réels x , y et z , dans cet ordre, sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique, si et seulement si :
 $2y = x + z$

PROPOSITION 3: Terme général

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

💡 Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors :

- $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = u_0 + nr$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = u_1 + (n - 1)r$

PROPOSITION 4: Somme des termes consécutifs

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2} = \frac{(\text{Nombre de termes}) \times (1^{er} \text{ terme} + \text{Dernier terme})}{2}$$

💡 On pose $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$

- Si $p = 0$, Alors $S_n = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$
- Si $p = 1$, Alors $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

1.4 Suite Géométrique

DÉFINITION 4

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre r (indépendant de n) est appelé la **raison** de la suite (u_n) .

💡 Monotonie d'une suite géométrique :

- $\begin{cases} u_{n_0} > 0 \\ q > 1 \end{cases} \implies (u_n) \text{ est croissante}$
- $\begin{cases} u_{n_0} > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \implies (u_n) \text{ est décroissante}$

Remarque :

Pour prouver qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de prouver que le rapport entre deux termes consécutifs n'est pas constant. (On montre par exemple que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$).

Cas Particulier : Une autre façon rapide de le prouver est de trouver un terme nul.

PROPOSITION 5: Propriété caractéristique d'une suite géométrique

(u_n) est géométrique $\iff (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$

💡 Trois réels x , y et z , dans cet ordre, sont des termes consécutifs d'une suite géométrique, si et seulement si :
 $y^2 = xz$

PROPOSITION 6: Terme général

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q , alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

💡 Si (u_n) est géométrique de raison q , alors :

- $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = u_0 \times q^n$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = u_1 \times q^{n-1}$

PROPOSITION 7: Somme des termes consécutifs

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison r , alors pour tout $(n, p) \in I^2$:

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

💡 On pose $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$

- Si $p = 0$, Alors $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $p = 1$, Alors $S_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

2 Limite d'une suite numérique

2.1 Limites des suites de référence

PROPOSITION 8: Limite nulle d'une suite de référence

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^p} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt[n]{n}} = 0$. En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

PROPOSITION 9: Limite infinie d'une suite de référence

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$. En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

2.2 Convergence d'une suite numérique

DÉFINITION 5: Convergence d'une suite réelle

- On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **convergente** si (u_n) admet une limite finie l ($l \in \mathbb{R}$) ;
On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
- Si (u_n) n'est pas convergente, on dit que (u_n) est **divergente**.

💡 Formellement, (u_n) converge vers l , si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Remarques :

- ⊕ La suite (u_n) est divergente signifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou bien (u_n) n'a pas de limite.
- ⊕ La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est **unique**.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$
- Si $k \in \mathbb{R}_+^*$ Alors :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} k u_n = +\infty$

PROPOSITION 10

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $l \in \mathbb{R}$, On a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = l$ (la réciproque est fausse)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$

2.3 Opérations sur les limites finies

PROPOSITION 11: Opérations sur les limites finies

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites convergentes. Alors :

- La suite $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim(u_n)$.
- La suite $(u_n v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n)$.
- Si $\lim(v_n) \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}$.

2.4 Extension des opérations sur la limite des suites

On admet que les résultats sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites.

2.5 Limite et ordre

PROPOSITION 12

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites convergentes. Alors :

- Si $(\forall n \geq n_0) u_n \geq 0$, alors : $\lim u_n \geq 0$.
- Si $(\forall n \geq n_0) u_n \leq v_n$, alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

⚠ Le passage à la limite "transforme" une inégalité stricte ($>$) en une inégalité large ($\geq$)

C-à-d : si $(\forall n \geq n_0) u_n < v_n$, alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$

Remarque : Prouver qu'une limite est strictement positive

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l .

Pour prouver que $l > 0$, il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang N .

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq N, \quad u_n \geq m \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m \Rightarrow l \geq m \Rightarrow l > 0$$

2.6 Monotonie et convergence

THÉORÈME 1: Théorème de la convergence monotone

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

⚠ Le théorème ci-contre assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.

3 Critères de convergences

PROPOSITION 13: Critère 1

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques telles que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

THÉORÈME 2: Critère 2 : Théorème des limites comparées

Si : $(\forall n \geq n_0)$; $w_n \leq u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

COROLLAIRE 1: Critère 3

Si : $(\forall n \geq n_0)$; $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

4 Limite d'une suite géométrique

PROPOSITION 14: Limite d'une suite géométrique (q^n)

Soit q un réel non nul.

- Si $q > 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

PROPOSITION 14: Limite de la suite (n^r) où $r \in \mathbb{Q}^*$

Soit r un nombre rationnel non nul.

- Si $r > 0$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$.

5 Suites de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ et $V_n = f(U_n)$

PROPOSITION 15: Limite d'une suite de la forme $V_n = f(U_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique tel que : $u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue en } \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow (f(u_n)) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

PROPOSITION 16: Suite récurrente de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ et $\ell \in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.