

1 Continuité d'une fonction :

a) Continuité d'une fonction en un point :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$
On dit que la fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 7 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+5) = 7 = f(2)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ d'où f est continue en 2

Exercice d'application 1 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{7x^2 - 5x - 2}{x^3 - 1} & x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

Montrer que : f est continue en 1

2) Soit g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x - 8} & x \neq 4 \\ g(4) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 4

3) Soit h une fonction définie sur $[-2, 2]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x}}{x} & x \neq 0 \\ h(0) = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Etudier la continuité de h en 0

Remarque : Si f n'est pas continue en x_0 on dit que f est discontinue en x_0

b) Continuité à droite - continuité à gauche :

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[x_0; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$
On dit que la fonction f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0 - \alpha; x_0]$ avec $\alpha > 0$
On dit que la fonction f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exercice d'application 2 :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} & x > 1 \\ f(1) = 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{3+x^2} - 2}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche du point 1

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x > 2 \\ g(2) = 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 2 & x < 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction g à droite et à gauche du point 2

Propriété :

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche de x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right)$$

c) Continuité d'une fonction sur un intervalle :

● Définition :

Définition :

- On dit que f est une fonction continue sur l'intervalle de type $]a, b[$ si la fonction f est continue en tout point de cette intervalle .
- On dit que f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si la fonction f est continue sur $]a, b[$ et f continue à droite de a et à gauche de b .
- De même on définit une fonction continue sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$, $] -\infty, +\infty[$

● Exemples de fonctions usuelles continue sur un intervalle :

Propriété :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ (et sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$)
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
- La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions $x \rightarrow \cos(x)$ et $x \rightarrow \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$



Exemples :

- › La fonction $f : x \rightarrow x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)
- › La fonction $g : x \rightarrow \frac{4x^3 - x^2}{2x - 6}$ est continue sur les intervalles $] -\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$
(car : g est une fonction rationnelle , donc continue sur tout intervalles inclus dans son
Domaine de définition $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$)

Remarque :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b[$
et $c \in]a, b[$
Si (f est continue sur $]a, c[$ et continue sur $]c, b[$
et f continue au point c)
alors f est continue sur $]a, b[$

Exercice d'application 3 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 5x^2 - 3x - 2 & x \geq 2 \\ f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & x < 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

d) Opérations sur les fonctions continues :

Propriété : soit $n \in \mathbb{N}$

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel

- Les fonctions $f + g$; $f - g$; kf ; $f \times g$; $|f|$; f^n sont aussi continues sur I
- Si ($g(x) \neq 0$; $\forall x \in I$) alors Les fonctions $\frac{1}{g}$; $\frac{f}{g}$ sont aussi continues sur I

Exemples :

- › Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x + 1 + \sin(x)$
Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$
La fonction $f : x \rightarrow x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)
et La fonction $f : x \rightarrow \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
Alors La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux fonctions continues)
- › Soit g une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g : x \rightarrow (x^2 - x)\sqrt{x}$
Montrons que g est continue sur $[0; +\infty[$
Les fonctions $x \rightarrow (x^2 - x)$ et $x \rightarrow \sqrt{x}$ sont continues sur $[0; +\infty[$
Alors La fonction g est continue sur $[0; +\infty[$ (comme produit de deux fonctions continues)



● L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone:

Soit f une fonction continue et *strictement* monotone sur un intervalle I
 $f(I)$ l'image de l'intervalle I par la fonction f

L'intervalle I	si f croissante	si f décroissante
$[a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$f(I) =]\lim_{a^+} f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(b), \lim_{a^+} f(x)[$
$[a, b[$	$f(I) = [f(a), \lim_{b^-} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$f(I) =]\lim_{a^+} f(x), \lim_{b^-} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{b^-} f(x), \lim_{a^+} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$f(I) = [f(a), \lim_{+\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{+\infty} f(x), f(a)]$
$] -\infty, b]$	$f(I) =]\lim_{-\infty} f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(b), \lim_{-\infty} f(x)[$
$] -\infty, +\infty[$	$f(I) =]\lim_{-\infty} f(x), \lim_{+\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim_{+\infty} f(x), \lim_{-\infty} f(x)[$

Exemple :

Soit f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ et avec son tableau de variation suivant :

Déterminer $f(]-1; 3])$; $f([3; 6])$;
 $f([6; +\infty[)$

x	-1	3	6	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	4	1

Exercices d'approfondissement

Exercice1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^3 - 4x^2 + x - 2} & x > 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} & x < 2 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche du point 2
- 2) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice2 :

Soient a ; b et c des nombres réels

- 1) f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax - 2}{2x - 1} & x > 1 \\ f(x) = 6x^2 - a & x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a sachant que f est continue au point 1

- 2) g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + x + c}{x - 2} & x > 2 \\ g(x) = 2x + b & x \leq 2 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de b et c sachant que g est continue au point 2

Exercice3 :

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans les cas suivant puis étudier la continuité de f sur D_f :

- 1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$
- 2) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} + \sqrt{6 - 2x}$

Exercice4 :

Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} & x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \\ h(2) = \frac{1}{6} = h(-2) \end{cases}$$

Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

- 1) Calculer : $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{-\infty} f(x)$
- 2) Déterminer les variations de la fonction f
- 3) Déterminer l'image des intervalles $] -\infty ; 0]$; $[0 ; 1]$; $[1 ; +\infty[$ par la fonction f

4 Théorème des valeurs intermédiaires :

A) Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$;
 il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que : $f(c) = k$
 (c.à.d : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$)

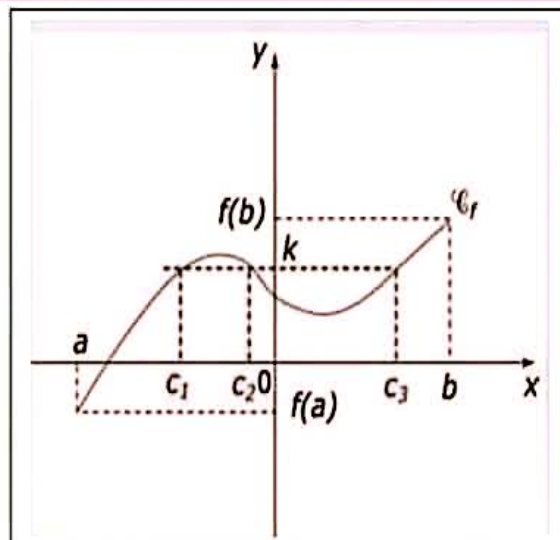
• Si f est strictement monotone Alors c est unique

Conséquence : (T.V.I)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$
 Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel
 $c \in]a; b[$ tel que : $f(c) = 0$

(c.à.d : l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a; b[$)

• Si f est strictement monotone Alors c est unique



Exercices d'applications

Exercice1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x - 1}{x^2 + 1}$$

1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$

2) En déduire que l'équation $f(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 2]$

Exercice2 :

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^3 - x - 1$$

Montrer que : l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$

Exercice3 :

Montrer que l'équation

$$(E) : \sqrt{x} = 1 + 4x - x^2$$

admet au moins une solution dans $]0; 4[$

Exercice4 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + x^3 + x - 9$$

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1; 2[$

B) Méthode de dichotomie (calcul approché des solutions d'une équation) :

• Activité 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 4$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique α solution dans l'intervalle $]1; 3[$

2) Vérifier que 2 est le milieu de l'intervalle $[1; 3]$; calculer $f(2)$ et en déduire que $1 < \alpha < 2$

3) calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et en déduire un autre encadrement de α

4) Donner une approximation de α sur un intervalle d'amplitude 0,25

• Méthode de dichotomie :



Considérons une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et l'équation $(E) : f(x) = 0$
 L'objectif de cette méthode est de trouver une approximation de la solution α de (E) dans $[a; b]$

• Si $f(a) = 0$ alors a est la solution de l'équation

• Si $f(b) = 0$ alors b est la solution de l'équation

• Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors la solution de l'équation $\alpha \in]a; b[$

1^{er} étape :

On divise l'intervalle $[a; b]$ en deux intervalles $[a; m]$ et $[m; b]$ de même amplitude

Avec $m = \frac{a+b}{2}$ milieu de l'intervalle $[a; b]$

2^{me} étape :

On calcule $f(m)$

• Si $f(m) = 0$ alors m est la solution de l'équation

• Si $f(a) \times f(m) < 0$ alors la solution $\alpha \in]a; m[$

• Si $f(m) \times f(b) < 0$ alors la solution $\alpha \in]m; b[$

2 Le composé de deux fonctions continues :

● Propriété 1 :

- Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et g est une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$; $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$
- Si f est une fonction continue en x_0 et g est une fonction continue en x_0 alors la fonction $g \circ f$ est une fonction continue en x_0
- Si f est une fonction continue sur I et g est une fonction continue sur J alors la fonction $g \circ f$ est une fonction continue sur l'intervalle I

Maths
Hajoui

● Conséquences :

- Si la fonction $u: x \rightarrow u(x)$ est continue sur un intervalle I alors les fonctions $x \rightarrow \cos(u(x))$ et $x \rightarrow \sin(u(x))$ sont aussi continues sur I
- Si la fonction $u: x \rightarrow u(x)$ est continue sur un intervalle I et $(u(x) \geq 0 ; \forall x \in I)$ alors le fonction $x \rightarrow \sqrt{u(x)}$ est aussi continue sur I

Exemples :

- › La fonction $x \rightarrow x^3 + 7x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)
Alors les fonctions $x \rightarrow \cos(x^3 + 7x^2)$ et $x \rightarrow \sin(x^3 + 7x^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- › Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x}$ est continue sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$
La fonction $x \rightarrow x^2 - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$
et $(x^2 - 2x \geq 0 ; \forall x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[)$
alors g est continue sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$

Maths
Hajoui

● Propriété 2 :

Soit f et g deux fonctions numériques ; a et b deux nombres réels
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et g est continue en b alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(b)$
La propriété reste vraie si on remplace les limites le nombre a par $(+\infty$ ou $-\infty)$

Exemples :

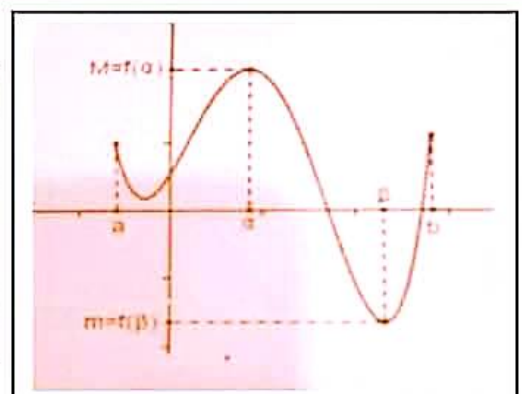
- › Calculons : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi x^2 + x - 1}{2}\right)$
On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi x^2 + x - 1}{2} = \frac{\pi}{2}$ et la fonction $x \rightarrow \sin(x)$ est continue en $\frac{\pi}{2}$
Donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi x^2 + x - 1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- › Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{3\pi x^2 + 2x - 5}{x^2 + 7x}\right)$
On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\pi x^2 + 2x - 5}{x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\pi x^2}{x^2} = 3\pi$ et la fonction $x \rightarrow \cos(x)$ est continue en 3π
Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{3\pi x^2 + 2x - 5}{x^2 + 7x}\right) = \cos(3\pi) = -1$

Maths
Hajoui

3 L'image d'un intervalle par une fonction continue :

● Propriété 1 :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- L'image d'un segment $[a; b]$ par une fonction continue f est un segment $[m; M]$ avec
 $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ la valeur minimal de la fonction f sur $[a; b]$
 $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$ la valeur maximal de la fonction f sur $[a; b]$



Remarque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

Pour tout $k \in J = f(I)$ il existe un unique $\alpha \in I$ tel que : $f(\alpha) = k$

c.à.d : (Pour tout $k \in f(I)$ l'équation $f(\alpha) = k$ admet une unique solution dans I)

En particulier : (si $0 \in f(I)$ l'équation $f(\alpha) = 0$ admet une unique solution dans I)

Conclusion :

Pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α dans un intervalle I de type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, +\infty[$ il suffit de montrer que f est continue et strictement monotone sur I et que $0 \in f(I)$

Exercices d'applications

Exercice5 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 + x^3 + x - 9$$

- 1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$
- 3) En déduire le signe la fonction f sur $\mathbb{R}$

**Maths
Hajoui**

Exercice6 :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{2}{3}$$

- 1) Déterminer le tableau des variations de la fonction f
- 2) Déterminer l'image des intervalles $]-\infty; 1];]1; 3]; [3; +\infty[$ par la fonction f
- 3) Montrer que : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

5 Fonctions réciproques :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

Pour tout $y \in J = f(I)$ il existe un unique $x \in I$ tel que : $f(x) = y$

La fonction définie sur $J = f(I)$ qui fait correspondre à tout élément y de J le seul point $x \in I$ tel que : $f(x) = y$; est appelée fonction réciproque de f et on la note f^{-1}

$$f: I \longrightarrow f(I)=J$$

$$x \longrightarrow f(x)=y$$

$$f^{-1}: J \longrightarrow I$$

$$x \longrightarrow f^{-1}(x)=y$$

Propriété :

La fonction réciproque f^{-1} est définie de $J = f(I)$ vers I

Pour tout élément $x \in J$ et pour tout élément $y \in I$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Exercices d'applications

Exercice1 :

Soit f une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 4x^2 - 1$$

- 1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$
- 2) Déduire que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 3) Montrer que : $\forall x \in J : f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2}$

**Maths
Hajoui**

Exercice2 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

- 1) Déterminer les variations de la fonction f
- 2) Soit h la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$
 - a) Montrer que : h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b) Calculer $h(4)$ et $h(3)$ et en déduire $h^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$ et $h^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$
 - c) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Propriété :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

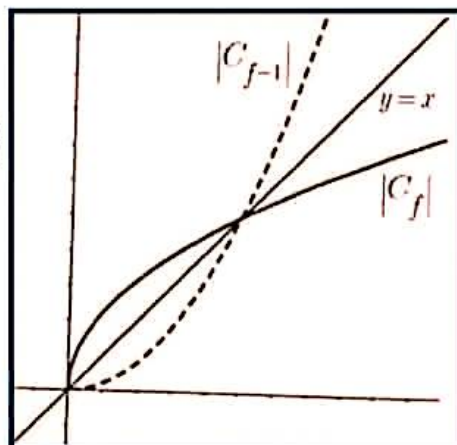
- La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie $J = f(I)$ vers I
- Pour tout élément $x \in J$ et pour tout élément $y \in I$:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

- La fonction f^{-1} est continue sur l'intervalle $J = f(I)$.
- La monotonie de la fonction f^{-1} sur l'intervalle $J = f(I)$ est la même que celle de la fonction f sur l'intervalle I
- Dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f sur I et celle de la fonction réciproque f^{-1} sur $f(I)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $(y = x)$

$$M(a; b) \in (C_f) \Leftrightarrow M'(b; a) \in (C_{f^{-1}})$$

- $(\forall x \in I : (f^{-1} \circ f)(x) = x)$
et $(\forall y \in J : (f \circ f^{-1})(y) = y)$



5 Fonction racine $n^{\text{ièmes}}$; $(\sqrt[n]{\quad})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

• Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $(\forall a \in [0; +\infty[)$; l'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$; cette solution est notée $\sqrt[n]{a}$ est appelée racine $n^{\text{ièmes}}$ de a (ou la racine de rang n de a).
- $(\forall a \in [0; +\infty[)$ et $(\forall x \in [0; +\infty[)$: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$
- La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ noté : $\sqrt[n]{\quad}$ est appelée fonction racine $n^{\text{ièmes}}$

- Exemples :**
- $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$; $5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$
 - $2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$; $3^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3$
 - $7^2 = 49 \Leftrightarrow \sqrt{49} = 7$; $10^2 = 100 \Leftrightarrow \sqrt{100} = 10$



- Remarques :**
- $(\forall a \in [0; +\infty[)$: $\sqrt[1]{a} = a$; $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
 - $\sqrt[3]{a}$ est appelée racine cubique de a

Exercice d'application1 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = 1 + \sqrt[3]{3x-6}$

Déterminer le domaine de définition de f puis calculer $f(2)$; $f(\frac{14}{3})$; $f(11)$

• Propriété 1 :

Soient x et y deux réels $x > 0$ et $y > 0$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$; $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}$; $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ et $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $(x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y})$ et $(x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$

Exercice d'application2 :

- 1) Simplifier les nombres suivants : $a = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $b = \sqrt[8]{16}$; $c = \sqrt[6]{125}$
- 2) Comparer les nombres $\sqrt[3]{7}$ et $\sqrt[4]{9}$ puis les nombres $\sqrt{5}$ et $\sqrt[5]{11}$
- 3) Classer dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[6]{15}$



Résolution dans de l'équation $x^n = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

	Si n est pair	Si n est impair
Si $a = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Si $a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$
Si $a < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	$x = -\sqrt[n]{ a }$

Exemples : $x^3 = 0$; $x^4 = 81$; $x^3 = 8$; $x^3 = -125$; $x^4 = -1$

● Propriété 2 :

• Soit f est une fonction définie sur un intervalle I ; $a \in I$ et $f(x) \geq 0$; $\forall x \in I$

• Si f est une fonction continue sur I

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ est aussi continue sur I

• Si $\lim_a f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_a \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

• Si $\lim_a f(x) = +\infty$ alors $\lim_a \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

La propriété reste vraie si on remplace dans les limites a par $(+\infty$ ou $-\infty)$

Exemples :

› Montrons que la fonction $f: x \rightarrow \sqrt[5]{x^4 + 7x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$:

La fonction $: x \rightarrow x^4 + 7x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction **polynôme**)

et $(x^4 + 7x^2 \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R})$ alors les fonctions $f: x \rightarrow \sqrt[5]{x^4 + 7x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

› Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt[3]{1 - x^2}$ est continue sur $[-1; 1]$

La fonction $: x \rightarrow 1 - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1; 1]$

et $(1 - x^2 \geq 0 ; \forall x \in [-1; 1])$ alors $g: x \rightarrow \sqrt[3]{1 - x^2}$ est continue sur $[-1; 1]$

› On a : $\lim_{+\infty} \frac{8x^2 + x - 1}{x^2 - 3x} = \lim_{+\infty} \frac{8x^2}{x^2} = 8$ Donc $\lim_{+\infty} \sqrt[3]{\frac{8x^2 + x - 1}{x^2 - 3x}} = \sqrt[3]{8} = 2$

› On a : $\lim_{2^+} \frac{x-1}{3x-6} = +\infty$ Donc $\lim_{2^+} \sqrt[3]{\frac{x-1}{3x-6}} = +\infty$

Exercices d'approfondissement

Exercice1 :

Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{4^+} \frac{\sqrt[3]{x-4}}{2x-8}$

2) $\lim_1 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

3) $\lim_1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt{x} - 3}{x-1}$

4) $\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$



Exercice2 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+3x^2+2}}{\sqrt[3]{2x^2-7x+3}}$

2) $\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - 3x$

3) $\lim_{+\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 3x} - 2x$

4) $\lim_{-\infty} \sqrt[3]{1 - x^3} + 5x$

Remarque :

Soient a et b deux réels positifs avec $a > b$

› $a - b = \sqrt[3]{(a-b)^3} = \sqrt[3]{a-b} \times \sqrt[3]{(a-b)^2}$ donc $\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}} = \frac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{\sqrt[3]{a-b} \times \sqrt[3]{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{a-b}$

› $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

› $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$ donc $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = \frac{a-b}{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}$

5 Puissance rationnelle :

● Définition :

Soient x un nombre réel positif ; $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ et $r = \frac{m}{n}$
 On définit : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ et $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ si $x > 0$

Exemples : $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^5}$; $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

En général : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall a \in [0; +\infty[) : a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

● Propriété 1 :

Soient x et y deux réels $x > 0$ et $y > 0$; $r \in \mathbb{Q}^*$ et $r' \in \mathbb{Q}^*$

- $x^r \cdot x^{r'} = x^{r+r'}$; $(x^r)^{r'} = x^{r \cdot r'}$; $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$
- $x^r \times y^r = x \cdot y^r$; $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$



Exemples : Soient x un nombre réel positif

Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} ; x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} ; \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} ; A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{108}}{\sqrt[4]{6}}$$

« Tout le monde est un génie.

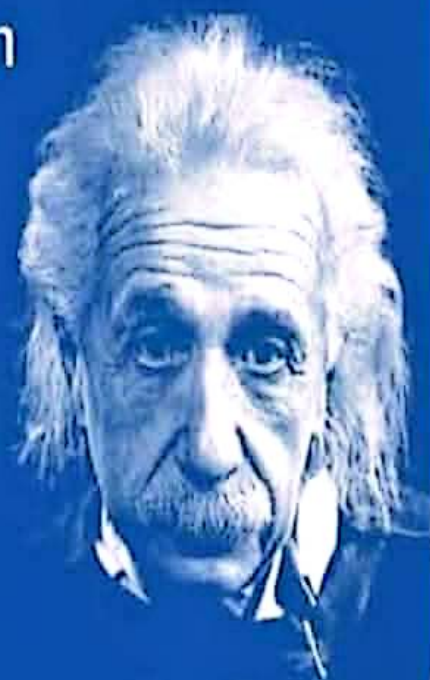
Mais si vous jugez un poisson

sur sa capacité à grimper

dans un arbre, il passera

sa vie entière à croire

qu'il est stupide. »



- Albert Einstein

