

Niveau : 2BAC : PC & SVT

Volume horaire : 15 heures

Degré d'importance : 50%

Les orientations pédagogiques

- On adoptera la définition suivante : une fonction f est continue au point x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- On admettra les résultats concernant la continuité des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles, des fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, et on mettra l'accent sur les applications de ces résultats.
- On admettra que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, ainsi que l'image d'un intervalle est un intervalle. On en déduira le théorème des valeurs intermédiaires.
- On admettra que si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I , alors $f+g$, $f \times g$, et λf (où λ est une constante) sont des fonctions continues sur I .
- On admettra que si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur $f(I)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I .

Les capacités attendus :

- Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle par une fonction continue ou strictement monotone.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour les équations, inéquations, et le signe des expressions.
- Utiliser la dichotomie pour approcher les solutions de $f(x) = l$ ou pour les encadrer.
- Appliquer les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la fonction réciproque pour une fonction continue et strictement monotone.

Les pré-requis :

- Limites et dérivation d'une fonction numérique.
- Équations et inéquations, et leur encadrement.
- Polynômes, fonctions usuelles, fonctions trigonométriques, etc.

Les extensions :

- Dérivation et étude d'une fonction.
- Fonctions logarithmiques et exponentielles.
- Calcul intégral et primitives.

1 Continuité d'une fonction numérique :

Activité 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x| - 4x + 3}{x^5 - 7x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 2}{-x^2 - x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - 3\sqrt{x+3}}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

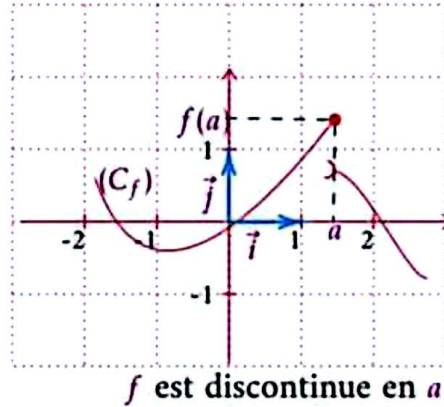
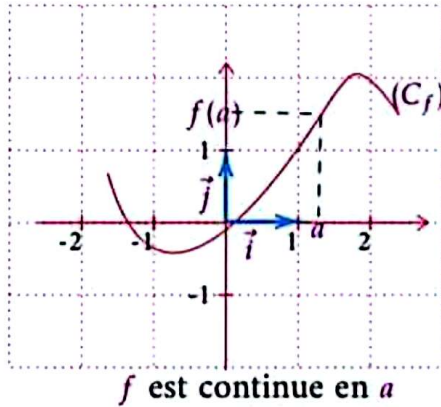
Solution :

Scanné avec CamScanner

• Définition : •

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I .
On dit que f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Exemple

- 1 La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3.

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6 = f(3) \end{aligned}$$

- 2 La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} \\ &= 3 \neq f(0) \end{aligned}$$

Exercice d'application

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

- 1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$.
- 2 $\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2}; x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

Solution :

Exercise 1

Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}; & x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $a = -1$.

2 $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; & x > 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

Solution :

2 Continuité à droite - continuité à gauche :

• Définition : •

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a-r; a]$ avec $r > 0$.
On dit que f est continue à droite de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; a+r]$ avec $r > 0$.
On dit que f est continue à gauche de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.



Exemple

La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche.
En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} \quad (\text{Du fait que } |x-1| = x-1 \text{ si } x > 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 = f(1) \end{aligned}$$

Ainsi f est continue à droite en 1 .

Et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)} \quad (\text{Du fait que } |x-1| = -(x-1) \text{ si } x < 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \neq f(1). \end{aligned}$$

Ainsi f est discontinue à gauche en 1 .

Propriété

f est continue en a si seulement si f est continue à gauche et à droite de a .

Autrement :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Exercice d'application

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$.

1 Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 0 .

2 f est-elle continue en 0 .

Solution :

Scanné avec CamScanner

3 Continuité d'une fonction sur un intervalle :

• Définition :

- On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en tout point de $]a; b[$.
- On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b .

Remarque :

On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

4 Fonction partie entière

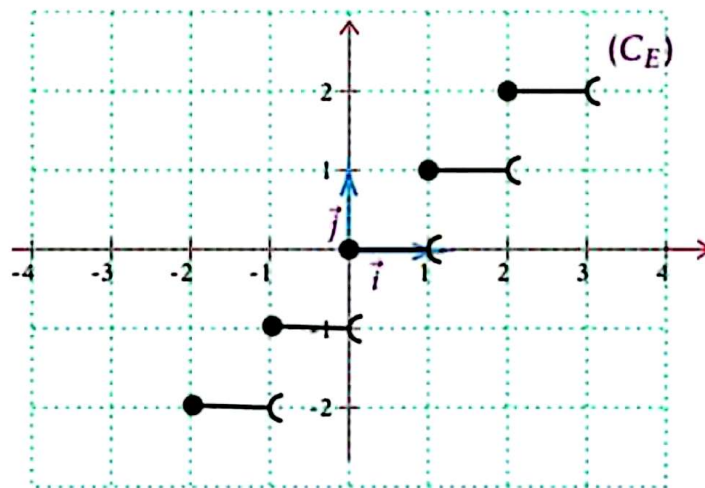
• Définition :

- La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.



Exemple

- $E(3,2) = 3$ parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$.
- La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :



- La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $] -1; 0[$ et à droite en -1 car $\lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.
- La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $]1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

Propriété

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple

- La fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynomiale.
- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \frac{3}{x-1}$.
La fonction $g : x \mapsto \frac{3}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur n'est jamais nul sur cet ensemble.
- Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par : $h(x) = \frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1}$.
La fonction $h : x \mapsto \frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ parce qu'elle est une fonction rationnelle et $]1; +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & ; \text{si } x < 3 \\ \frac{4-x}{x} & ; \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
Solution :

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M et m sont respectivement le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

- Solution :**

[illegible][illegible]

2 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Résultats :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
On a alors les résultats suivants :

L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty; a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$



Exemple

- 1 On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.
La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
On a :

$$\begin{aligned} f([2; 4]) &= [f(2); f(4)] \\ &= [-5; -1] \\ f([-1; 1]) &= [f(1); f(-1)] \\ &= [-4; 4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([2; +\infty[) &= [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] \\ &= [-5; +\infty[. \\ f(]-\infty; 2]) &= [f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] \\ &= [-5; +\infty[. \end{aligned}$$

2 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

On a : $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ et $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 > 0$. La fonction f est donc continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$. Il en découle donc les résultats suivants :

$$\begin{aligned} f([0, 1]) &= [f(0), f(1)] \\ &= \left[-3, \frac{-1}{2}\right], \\ f([-2, -1]) &= [f(-2), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)] \\ &= [7, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([-1, 1]) &= \left[\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1) \right] \\ &= \left[-\infty, \frac{-1}{2} \right] \\ f([2, +\infty]) &= [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] \\ &= \left[\frac{1}{3}, 2 \right] \end{aligned}$$

Exercice d'application

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

- 1** Déterminer D_f .
- 2** Étudier la monotone de f .
- 3** Déterminer $f([0, 1])$; $f([4, +\infty))$ et $f(-\infty, 4])$.

Solution :

Exercice 3

On considère f une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

- 1 Dresser le tableau de variation de la fonction
- 2 Déterminer les images des intervalles suivants $] -1; 0[$; $[1; 2]$; $[-1; 2[$; $[1; +\infty[$ par f .

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- 1 Les fonctions $f + g$; $f \times g$; λf et $|f|$ sont continues sur I .
- 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f^n est continue sur I .
- 3 Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- 4 Si $(\forall x \in I) : f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

[illegible]

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définie de $J = f(I)$ vers I telle que :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

Conséquence

$$\bullet (\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\bullet (\forall x \in J) : (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

**Exemple**

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$.

Déterminons l'expression de f^{-1} : Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = (x - 2)^2 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x - 2)^2$. Il en résulte : $(\forall x \in [2, +\infty[); f^{-1}(x) = (x - 2)^2$.

Exercice d'application

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

- 1** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2** Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

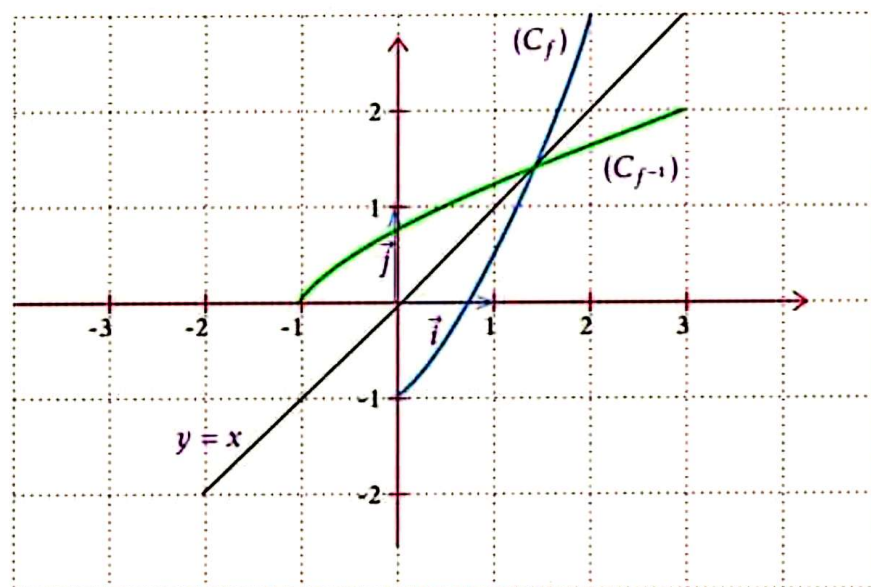
Solution :

..... 	
---	---

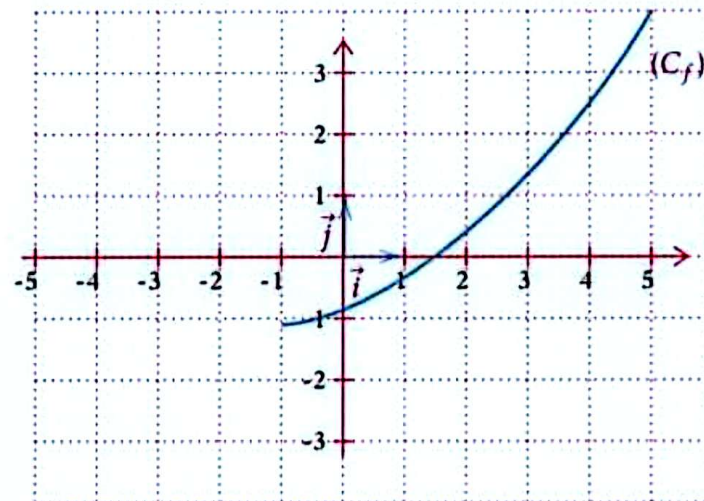
Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variations que la fonction f .
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère :

**Exercice d'application**

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$.



- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- 3 Construire la courbe représentative de f^{-1} .

Propriété

Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.

- Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Exercice d'application

1 On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$.

- a** Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- b** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 1} - 2x$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + x + 1} - x$