

Chapitre 3

Étude de fonctions

Pr : Omar BACHAIN *

Niveau : 2^{ème} Bac PC/SVT

Table des matières

1	Plan d'étude d'une fonction	1
2	Exemples d'études de fonctions	3
2.1	Partie 1 : Étude d'un polynôme	3
2.2	Partie 2 : Étude d'une rationnelle	5
2.3	Étude d'une fonction trigonométrique	7

*Lycée qualifiant Sidi Hsain

1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f , on suit souvent les étapes suivantes :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

Expression	Condition de définition
$\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\sqrt{u}$	$u \geq 0$
$\frac{1}{\sqrt{u}}$	$u > 0$

2. Étudier la parité et les éléments de symétrie de (C_f) , puis en déduire le domaine d'étude D_E :

Rappel

- f est paire $\iff \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est impaire $\iff \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Rappel

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) ; 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$
- Le point $I(a; b)$ est centre de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) ; 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) ; f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemples

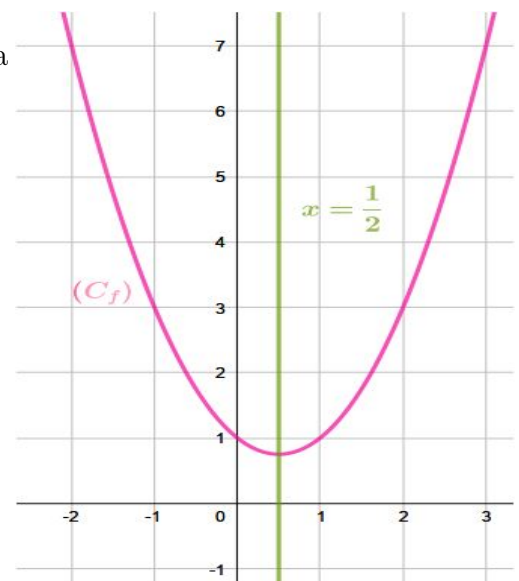
▷ La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 \times \frac{1}{2} - x = 1 - x \in \mathbb{R}$
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) &= f(1 - x) \\ &= (1 - x)^2 - (1 - x) + 1 \\ &= 1 - 2x + x^2 - 1 + x + 1 \\ &= x^2 - x + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

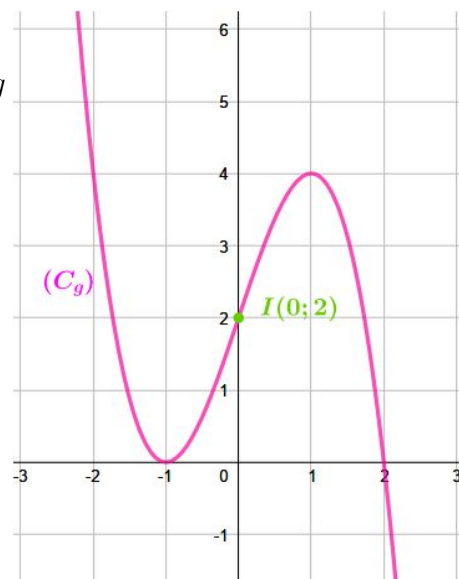


► Le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de la fonction g définie par : $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.

En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

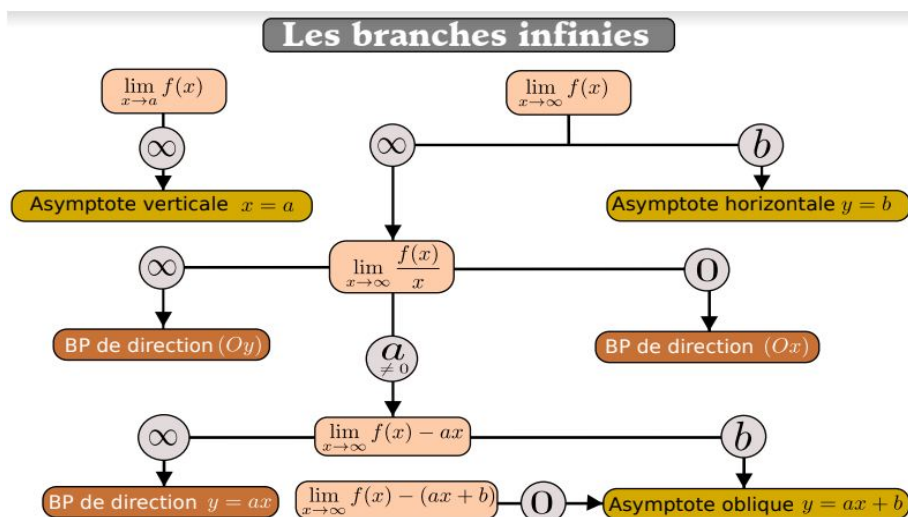
$$\begin{aligned} g(2 \times 0 - x) &= g(-x) \\ &= -(-x)^3 + 3(-x) + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2 \\ &= 4 - (-x^3 + 3x + 2) \\ &= 4 - g(x) \end{aligned}$$



3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f ou D_E
4. Étudier les variations de f : calculer $f'(x)$ et étudier son signe, puis en déduire le tableau de variations de f
5. Étudier les branches infinies de (C_f) :

Rappel

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de (C_f) .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de (C_f) au voisinage de ∞ .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$; on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$:
 - Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, alors (C_f) admet asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de (C_f) .



6. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à ses asymptotes horizontale ou oblique :
 - Étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.
7. Déterminer l'intersection de (C_f) avec les axes du repère :
 - Avec l'axe des abscisses ; on résout $f(x) = 0$.
 - Avec l'axe des ordonnées ; on calcule $f(0)$.
8. Étudier la convexité de (C_f)
 - Calculer $f''(x)$, puis étudier son signe et déterminer les points d'inflexions de (C_f) :

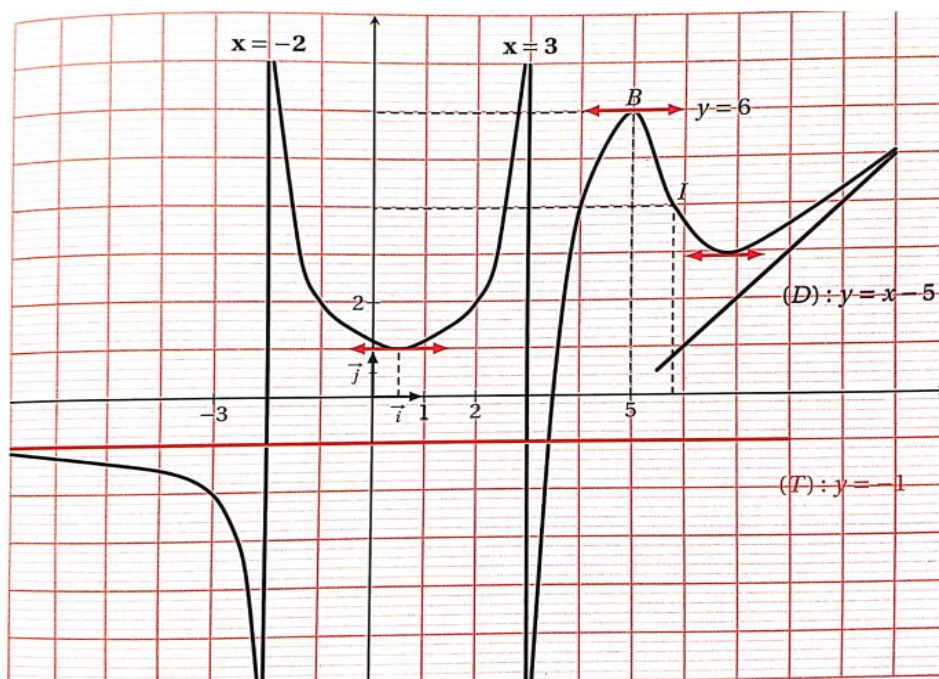
Rappel

- Si $f''(x) > 0$ sur I , alors la courbe (C_f) est convexe sur I .
- Si $f''(x) < 0$ sur I , alors la courbe (C_f) est concave sur I .
- Si $f''(x) = 0$ et f'' change de signe en a , alors $I(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

9. Déterminer les tangentes ou les demi-tangentes dans des points particuliers.
10. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

✂ Illustration : Lecture graphique d'une courbe.

Le tracé ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction sur l'intervalle $[-7; 10]$.



Cette courbe admet :

- Deux asymptotes verticales d'équations respectives : $x = -2$ et $x = 3$.
- Une asymptote horizontale d'équation : $y = -1$, au voisinage de $-\infty$.
- Une asymptote oblique d'équation : $y = x - 5$, au voisinage de $+\infty$.
- Un point d'inflexion I .
- Trois tangentes horizontales.

2 Exemples d'études de fonctions

2.1 Partie 1 : Étude d'un polynôme

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Étudier les variations de g

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1$, et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

2. (a) Montrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$; et que $2 < \alpha < 3$.

g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) = [-5; +\infty[$

Comme $0 \in [-5; +\infty[$, alors selon T.V.I l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$. Et $g(2) \times g(3) < 0$ car $g(1) = -1$ et $g(3) = 15$, donc $2 < \alpha < 3$.

(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

• -1 est une valeur maximale de g sur $] -\infty; 1]$ donc : $g(x) < 0$ sur $] -\infty; 1]$.

g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $\alpha \in [1; +\infty[$; donc :

• $1 \leq x \leq \alpha \Rightarrow g(x) \leq g(\alpha) \Rightarrow g(x) \leq 0$. ($g(\alpha) = 0$)

• $x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \geq g(\alpha) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

3. Étudier les branches infinies de (C_g)

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$, donc (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$; de même au voisinage de $-\infty$.

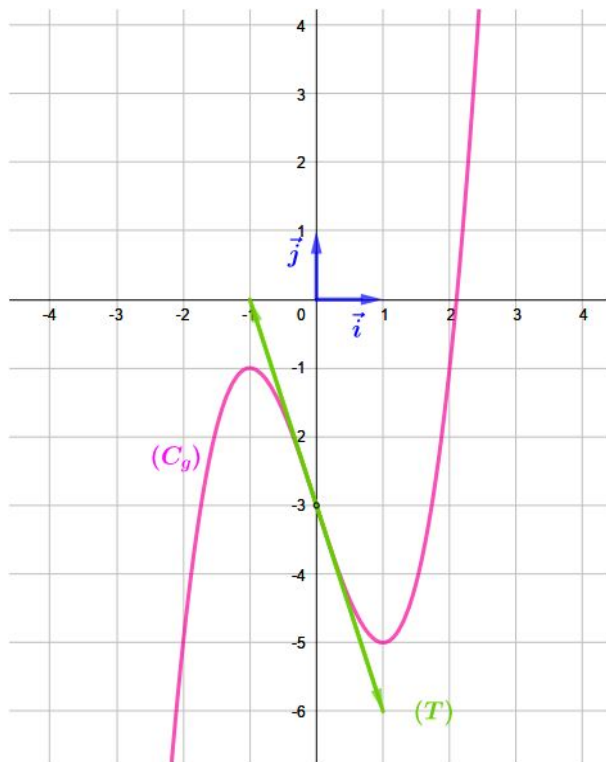
4. (a) Montrer que $I(0; -3)$ est un point d'inflexion de (C_g) .

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g''(x) = 6x$ et g'' s'annule en 0 en changeant de signe.

Et puisque $g(0) = -3$, alors $I(0; -3)$ est un point d'inflexion de (C_g) .

(b) Déterminer la tangente de (C_g) en I . L'équation de la tangente de (C_g) en I est : $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = -3x - 3$.

5. Représentation graphique de (C_g) .



2.2 Partie 2 : Étude d'une rationnelle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}$.

- Calculer les limites de f aux bornes de D_f et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} = 0$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 + 6x + 3}{2x^2} = +\infty$;
- Déterminer les branches infinies de (C_f) .
 - Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de (C_f) .
 - On a : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = 0$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
- (a) Montrer : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} \right)' \\
 &= 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \\
 &= \frac{x^3 - 3x - 3}{x^3} \\
 &= \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

- (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire la tableau de variations de f .

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{g(x)}{x^3}$ et d'après la question 2)b de la partie 1 on a :

- Si $x < 0$ ou $x > \alpha : f'(x) > 0$.
- Si $0 < x \leq \alpha : f'(x) \leq 0$. Ainsi le tableau de variations de f est comme suit :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
f	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	1

4. Étudier la position relative de (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = x$.

On a : $f(x) - x = \frac{3(2x+1)}{2x^2}$ donc :

- $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ est le point d'intersection de (C_f) et (Δ) .
- $x \in]0; -\frac{1}{2}[\Rightarrow f(x) - x < 0$ donc (C_f) est au-dessous de (Δ) .
- $x \in]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; +\infty[\Rightarrow f(x) - x > 0$ donc (C_f) est au-dessus de (Δ) .

5. Étudier la convexité de (C_f) .

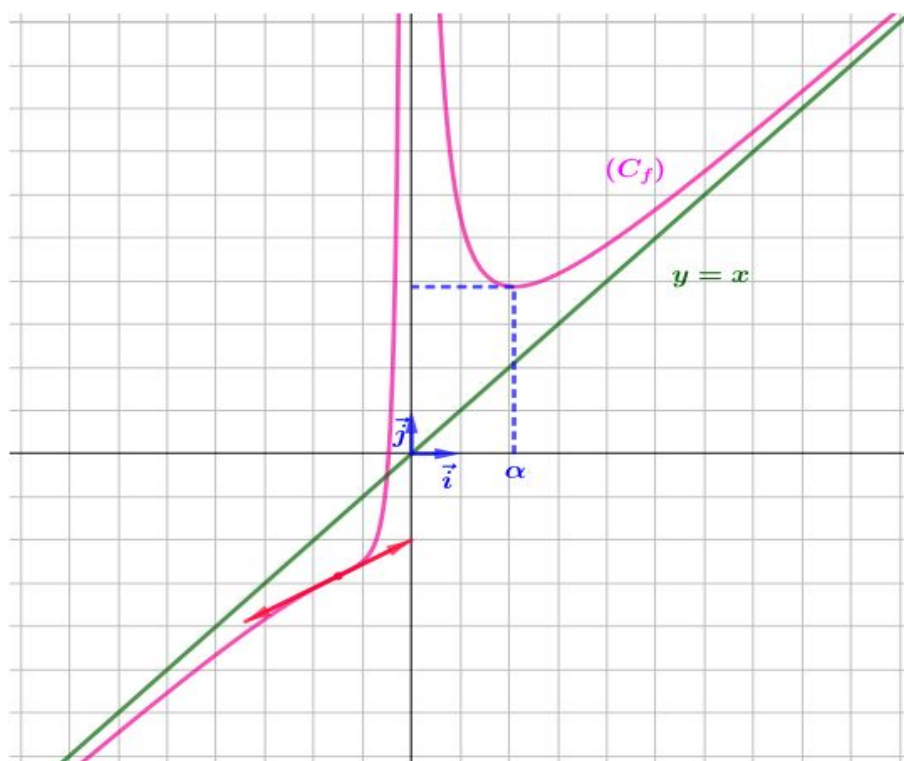
On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^3}\right)' \\
 &= \frac{6}{x^3} + \frac{9}{x^4} \\
 &= \frac{6x + 9}{x^4} \\
 &= \frac{3(2x + 3)}{x^4}
 \end{aligned}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $2x + 3$; donc :

- $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{17}{6}\right)$ est le point d'inflexion de (C_f) .
- $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\Rightarrow f(x) - x < 0$, donc (C_f) est concave.
- $x \in]-\frac{3}{2}; -0[\cup]0; +\infty[\Rightarrow f(x) - x > 0$ donc (C_f) est convexe.

6. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On donne $\alpha \simeq 2.1$ et $f(\alpha) \simeq 3.8$).



2.3 Étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos 4x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / 1 - \cos 4x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \cos 4x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 4x \neq 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que pour tout x de D_f : $f(x) = \frac{1}{4\sin(2x)}$
Soit x un réel de D_f . On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos 4x} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 2 \sin x \cos x}{1 - \cos(2 \times (2x))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{2 \sin^2(2x)} \\ &= \frac{1}{4 \sin(2x)} \end{aligned}$$

Car : $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ et $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$.

- (b) Montrer que l'on peut choisir l'intervalle $I =]0; \frac{\pi}{2}[$ pour étudier la fonction f .

• Montrons que la fonction f est périodique.

On sait que la fonction $x \mapsto \sin(ax)$ est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{a}$ où $a \neq 0$.

Donc la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est une fonction périodique de période π .

$$\begin{aligned} x \notin D_f &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{k\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x + \pi = \frac{(k+2)\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x + \pi = \frac{k'\pi}{2}; \quad (k' = k+2) \\ &\Leftrightarrow (x + \pi) \notin D_f \end{aligned}$$

Donc : $x \in D_f \Leftrightarrow (x + \pi) \in D_f$. C'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x \in D_f \Leftrightarrow (x + \pi) \in D_f$.

Et on a : $(\forall x \in D_f)$:

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \frac{1}{4 \sin(2(x + \pi))} \\ &= \frac{1}{4 \sin(2x + 2\pi)} \\ &= \frac{1}{4 \sin(2x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent f est une fonction périodique de période π .

- Étudions la parité de f .

Montrons que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$.

$$\begin{aligned} x \notin D_f &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{k\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / -x = \frac{-k}{2} \\ &\Leftrightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) / -x = \frac{k'}{2}; \quad (k' = -k) \\ &\Leftrightarrow (-x) \notin D_f \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in D_f)$ on a $(-x) \in D_f$.

Et on a : $(\forall x \in D_f)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{4\sin(-2x)} \\ &= -\frac{1}{4\sin(2x)} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent f est une fonction impaire, il suffit donc de l'étudier sur $[0; +\infty[\cap D_f$.

Or, f est une fonction périodique de période π , donc il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap D_f$.

Il suffit alors d'étudier f sur : $[0; +\infty[\cap [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap D_f =]0; \frac{\pi}{2}[$.

D'où l'ensemble d'étude de la fonction f est : $I =]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. Étudier des variations de f sur I .

Les limites de f aux bornes de I

- On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(2x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(2x)} = +\infty$, Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin(2x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin(2x)} = +\infty$, Donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

La fonction dérivée.

$(\forall x \in I)$ On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{\sin(2x)} \right)' \\ &= \frac{(1)' \times (4\sin(2x)) - (1) \times (4\sin(2x))'}{(4\sin(2x))^2} \\ &= \frac{-8\cos(2x)}{16(\sin(2x))^2} \\ &= \frac{-\cos(2x)}{2(\sin(2x))^2} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{et} \quad 0 < 2x < \pi \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

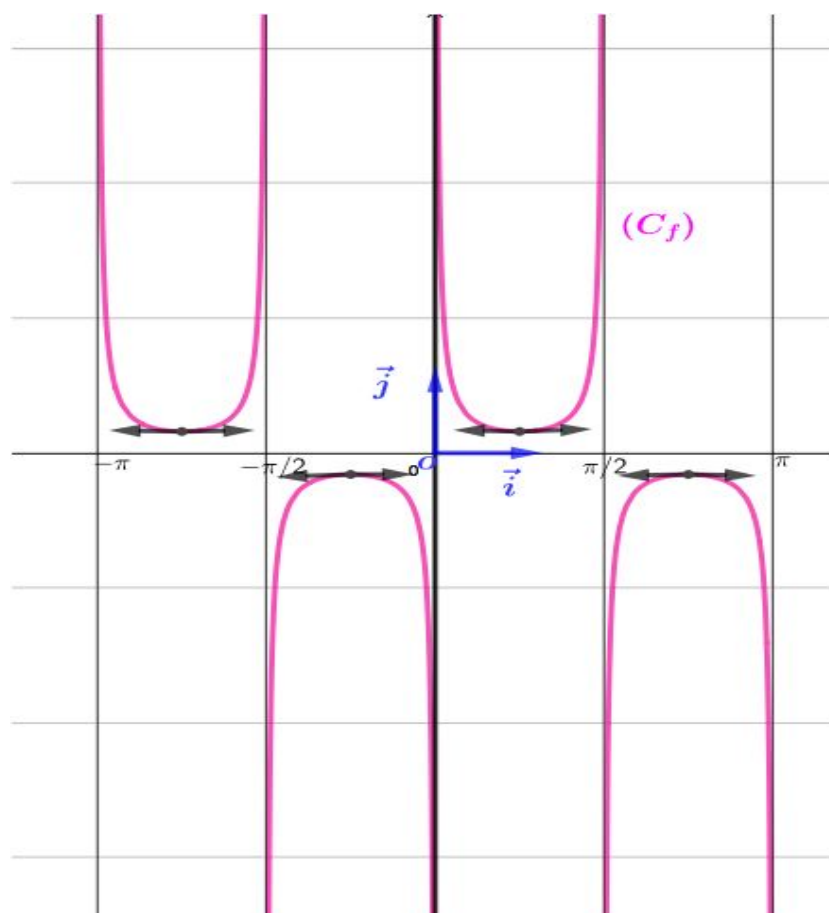
Et on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) < 0 \text{ et } 0 < 2x < \pi \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \pi \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Donc le tableau de variations de la fonction f est :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	—	0	+
f	$+\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$

4. La courbe de la fonction f .



Références

[1] Le manuel « maxi MATHS » " 2^{ème} année du baccalauréat sciences expérimentales ".

[2] Le manuel « maxi MATHS » ” 1^{ère} année du baccalauréat sciences expérimentales ”.

[3] Le manuel « mathématiques appliquées à l'économie » ” 2^{ème} année du baccalauréat sciences économiques ”.