

Rappels

Activité

- ★ Dans chacun des cas suivants , déterminer la limite de la fonction f en x_0 .

$$f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 4, x_0 = 0 \qquad f(x) = \frac{-3x^3 + 2x^2 - x + 4}{x^2 - x + 4}, x_0 = 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}, x_0 = 1 \qquad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, x_0 = 2$$

- ★ Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 8x^2 - 11x + 13 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 - x + 4}{x^2 - 3x + 24}$$

Réponse

Théorèmes

- ★ La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle de son monôme de plus haut degré :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ou $a_n \neq 0$, on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n$

- ★ La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré :

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0} \text{ ou } a_n \cdot b_p \neq 0, \text{ on a : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

- ★ Soit f une fonction et l un réel x tend vers x_0 , ou vers x_0^+ , ou vers x_0^- , ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on a les résultats suivants :

☘ Si $\lim f = l$ et f est positive alors $\lim \sqrt{f} = \sqrt{l}$ ($l \geq 0$)

♣ Si $\lim f = +\infty$ et f est positive alors $\lim \sqrt{f} = +\infty$

 x_0^- , ou vers $+\infty$, ou vers $-\infty$

Limite de la somme

$\lim f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée ($f.i$)

Limite du produit

$\lim f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f(x).g(x))$	$l.l'$	$+\infty$ si $f.g > 0$	$-\infty$ si $f.g < 0$	$+\infty$ si $f.g > 0$	$-\infty$ si $f.g < 0$	<i>f.i</i>

Limite du quotient

$\lim f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	$l' \in \mathbb{R}^*$	0	0	$\pm\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$
$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$ si $\frac{f}{g} > 0$	$f.i$	0	$+\infty$ si $\frac{f}{g} > 0$	$-\infty$ si $\frac{f}{g} < 0$	$f.i$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 4} + x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

Réponse

[illegible]

Théorème

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$

avec $a \in \mathbb{R}$

Preuve

💡Esercice n 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 4\sin(7x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x^2 - 9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos^2(x)}{x^4 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(3x)}$$

Réponse

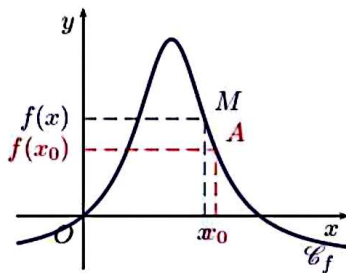
Continuité en un point

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

- 1) On dit que la fonction f est continue en x_0 de I si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- 2) On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- 3) On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- 4) On dit que la fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

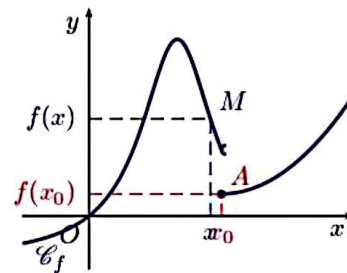
Graphiquement

Dir que f est continue en x_0 signifie que sa courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) ne présente aucun saut au point $A(x_0; f(x_0))$. Si f n'est pas continue en x_0 , on dit que f est **discontinue** en x_0 .



La fonction f est continue en x_0 .

Pour tout ϵ et x_0 de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .



La fonction f est discontinue en x_0 .

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse x_0 . Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de x_0 .

Exercice n3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Etudier la continuité de f en 1.

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Continuité sur un intervalle

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

- 1) On dit que la fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tous ses points.
- 2) On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue sur l'ouvert $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b .
- 3) Si f et g sont continues sur le même intervalle I alors les fonctions $f + g$, $f - g$ et $f \cdot g$ sont continues sur I .
- 4) Si f et g sont continues sur le même intervalle I et si en plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions : $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- 5) Si f est continue et positive sur un intervalle I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction continue en tout point d'un intervalle ouvert I , sauf en un réel x_0 de I . Si f admet une limite finie l en x_0 alors la fonction g définie sur I par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $g(x_0) = l$ est continue en x_0 .

On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 et que g est son prolongement par continuité en x_0 .

Exercice n 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 64}{x - 4}$

Déterminer le prolongement par continuité de f en 4.

Réponse

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice n 5

Soit f la fonction définie sur $[-3, +\infty[\setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

Réponse

.....
.....
.....
.....
.....
.....

💡 Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. La fonction qui à tout réel x de I associe le réel $g(f(x))$ est appelée la composée de f par g . On la note $g \circ f$, on lit : g rond f

Exemple

$f(x) = 4x - 5$ et $g(x) = x^2 + 1$, on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(4x - 5) = (4x - 5)^2 + 1 = 16x^2 - 40x + 26$
 $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1) - 5 = 4x^2 - 1$
 $g(f(x)) = 16x^2 - 40x + 26 \neq f(g(x)) = 4x^2 - 1$
 donc $g \circ f \neq f \circ g$ La composition n'est pas commutative.

💡 Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Soit x_0 un élément de I . Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0

💡 Théorème

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow l} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l'$
 (x_0, l, l') pourront être finis ou infinis

💡 Exercice n 6

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Donner l'expression de $(g \circ f)(x)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x)$

Réponse

.....

💡 Exercice n 7

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$+\infty$	4	0	$+\infty$	

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{-x^2 + x + 1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right) \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f\left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 1}\right) \quad \lim_{x \rightarrow (1)^+} \left(\frac{3}{f(x) - 4}\right) \quad \lim_{x \rightarrow (3)^-} \left(\frac{-2}{f(x)}\right) \quad \lim_{x \rightarrow (3)^-} f\left(\frac{2}{f(x)}\right)$$

Réponse

.....

Théorème

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 et l un réel

1) On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

i Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de I , distinct de x_0 , alors $l \geq 0$

i Si $f(x) \leq 0$ pour tout x de I , distinct de x_0 , alors $l \leq 0$

2) **Théorème de comparaison**

i Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, on a $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

i Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

3) i **Théorème des Gendarmes** Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, on a :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

i Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, on a : $|f(x) - l| \leq |g(x)|$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

(Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^+ , x_0^- ou $\pm\infty$)

Exercice n 8

Corriger les réponses fausses.

Les fonctions g et h sont données par leurs courbes respectives (C_g) et (C_h) . On donne des informations sur la fonction f .

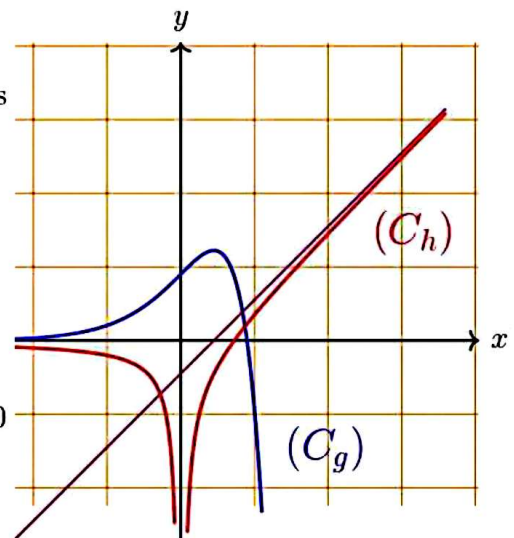
a) Si $f(x) \geq h(x)$ sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Si $f(x) \leq h(x)$ sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

c) Si $f(x) \geq g(x)$ sur $] -\infty, 0[$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

d) Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $] -\infty, 0[$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

e) Si $f(x) \leq g(x)$ sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n 9

- a) Déterminer la limite de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ en $+\infty$
- b) Déterminer la limite de $f(x) = \cos(x) + x$ en $+\infty$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

- a) Montrer que pour $x \neq 0$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$
- b) Que peut-on conjecturer sur $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice n 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) + 3$

- a) Montrer que pour $x \neq 0$ on a : $|f(x) - 3| \leq |x|$
- b) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

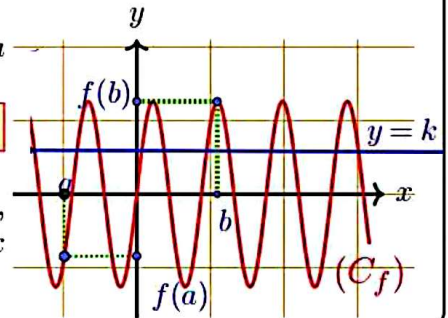
.....

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède **au moins une solution** dans l'intervalle $[a, b]$.

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a; b]$ et, sur $[a; b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

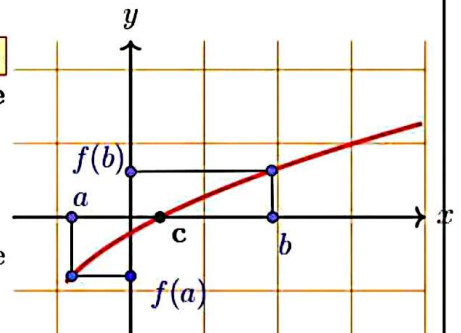


Un **corollaire** est une conséquence directe et immédiate du théorème précédent. En général, c'est une version du théorème dans un cas particulier.

Corollaire

Soit f une fonction définie et **continue et strictement monotone** (strictement croissante ou bien strictement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$ alors :

- 1) $\forall k \in f([a, b])$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$
- 2) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, il existe un unique réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$



Exercice n12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 1$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $] -2, -1[$.
- 2) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Réponse

.....

.....

.....

.....

Exercice n13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Réponse

.....

.....

.....

.....

Exercice n14

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f .

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
(on justifiera le résultat).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	1

Réponse

Images d'intervalles par une fonction strictement monotone

Dans ce qui suit, a et b sont deux réels et f une fonction définie sur l'intervalle I

$f(I)$	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$f([a, b])$	$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f([a, b[)$	$f([a, b[) = [f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a, b[) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$f(]a, b])$	$f(]a, b]) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f(]a, b]) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]a, b])$	$f(]a, b]) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$f(]a, b]) = [f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f([a, +\infty[)$	$f([a, +\infty[) = [f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$f(]-\infty, b])$	$f(]-\infty, b]) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$f(]-\infty, b]) = [f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$f(]a, +\infty[)$	$f(]a, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(]a, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty, b])$	$f(]-\infty, b]) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f(]-\infty, b]) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$f(\mathbb{R})$	$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Remarque

L'image d'un intervalle par une fonction strictement monotone est un intervalle de même nature.

Exercice n15

Déterminer l'image par f de l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = 2x - x^2, I =]-\infty, 0] \quad f(x) = \frac{3}{x-1}, I =]1, +\infty[$$

Réponse

Limites et comportement asymptotique

Remarque

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe (C_f) d'une fonction f . Si x et $f(x)$ tend vers ∞ , alors on dit que (C_f) admet une branche infinie.

Exercice n 16

Le graphique ci-contre représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Ayant au voisinage de $-\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{j})$ et au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{i})$. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Réponse

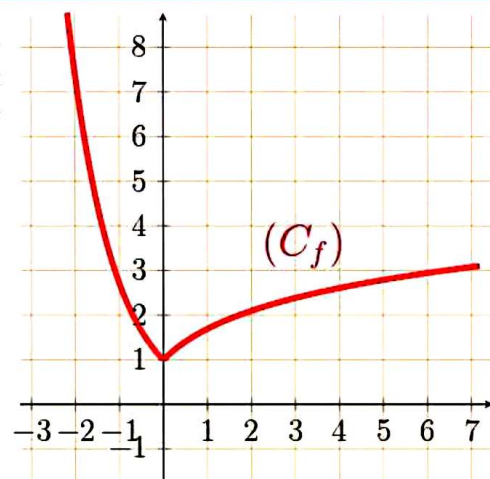
.....

.....

.....

.....

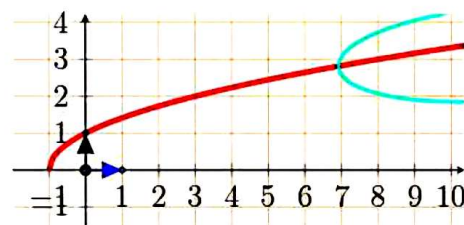
.....



Branche infinie de direction (xx')

⑧ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

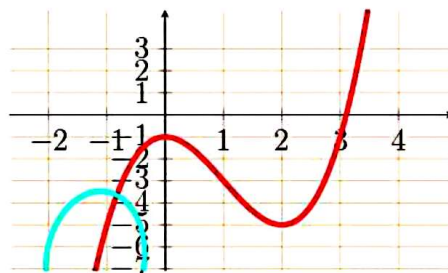
alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $\pm\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses. $(O, \vec{i})$



Branche infinie de direction (yy')

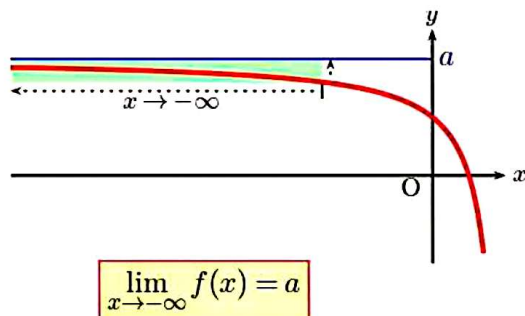
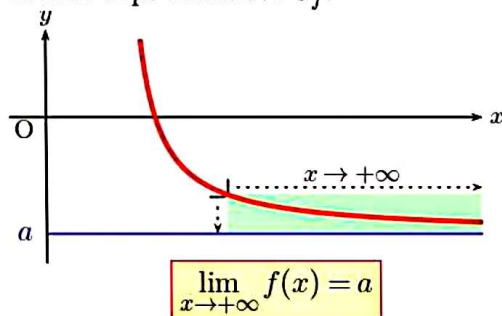
⑧ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $\pm\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées. $(O, \vec{j})$



Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$: On dit que la droite d'équation $y = a$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

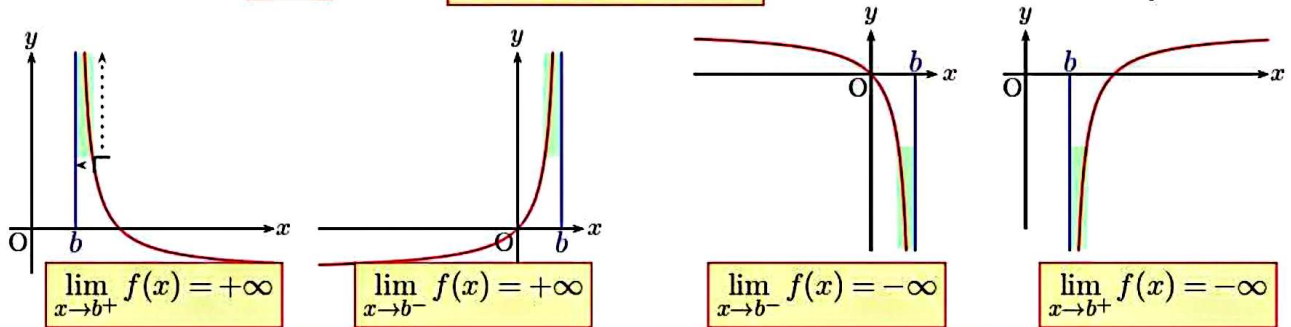


asymptote verticale

Définition

Dans le cas où la limite en b vaut $\pm\infty$, on dit que :

La droite d'équation $x = b$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



Exercice n 17

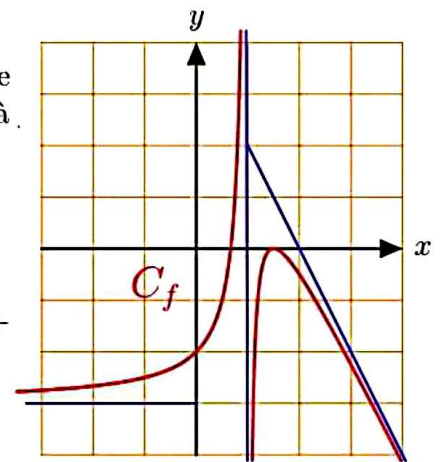
Le graphique représente la courbe ($\mathcal{C}_f$) d'une fonction f .

La droite (Δ) : $y = -2x + 4$ est une asymptote à ($\mathcal{C}_f$) au voisinage de $+\infty$. Les droites d'équations $x = 1$ et $y = -3$ sont des asymptotes à ($\mathcal{C}_f$).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x - 4], \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x) + 3} \right)$$



Réponse

.....

.....

.....

.....

Asymptote oblique à la courbe

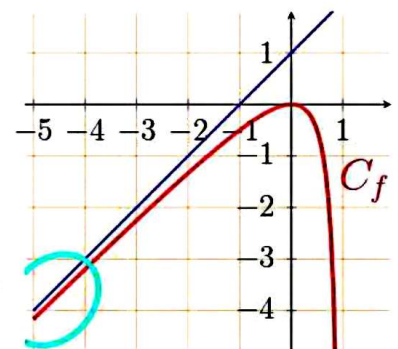
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ($\mathcal{C}_f$) sa courbe selon un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}^*$. Alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}_f$) au voisinage de $\pm\infty$

On dit que la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f au voisinage de $\pm\infty$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Exercice n18

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

2) En déduire une équation de l'asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

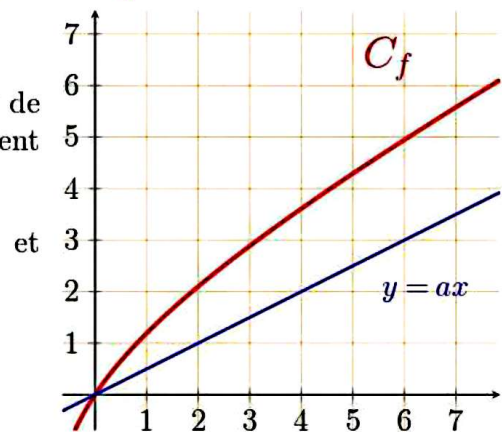
.....

Branches paraboliques de direction oblique

La courbe (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$$



Exercice n19

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-2} + 3x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$

2) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Branches infinies

