

Probabilités

2 BAC : PC-SVT

Résumé De Cours

Exercices D'application

Extraits Examens Nationaux

2003-2024



Cardinal d'un ensemble :



Soit E un ensemble fini Le cardinal de E est le nombre d'éléments de E , on le note **Card E**



Soit A et B deux parties d'un ensemble fini

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$



Principe fondamental du dénombrement :

Soit une expérience peut être réalisée en p choix ($p \in \mathbb{N}^*$)

Si le premier choix peut être réalisé en n_1 façons différentes

et le second choix peut être réalisé en n_2 façons différentes

.

.

et le p -ème choix peut être réalisé en n_p façons différentes

alors le nombre façons différentes de réaliser cette expérience est le produit :

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$$



Les nombres : $n!$, A_n^p et C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$	$0! = 1$
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	$C_n^p = C_n^{n-p}$	
$C_n^n = 1$ $C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^1 = n$	



Types de tirages : On tire p objets parmi n objets

Type de tirage :	Nombre de tirages possible est :	L'ordre :
simultané	C_n^p ($p \leq n$)	n'a pas d'importance
Successif avec remise	n^p	est important
Successif sans remise	A_n^p ($p \leq n$)	est important



Le nombre de possibilités d'arrangement de n éléments. Si on a n éléments dont :

n_1 élément de type A

n_2 élément de type B

n_3 élément de type C

Alors le nombre de possibilités d'arrangement de ces n éléments est : $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

Probabilités



Probabilités d'un ensemble fini :

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaire qui le composent, on la note $p(A)$



Propriétés : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Probabilités :	L'événement :
A	$p \leq p(A) \leq 1$
$\bar{A}$	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ Si (A et B sont incompatibles) Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$



S'il y a équiprobabilité alors pour tout événement A de Ω , on a :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

Loi d'une variable de probabilité aléatoire :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire Pour définir la loi de probabilité de la variable X sur Ω on suit les étapes suivantes :

- 1 On détermine $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X
- 2 On calcule pour chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = p(X = x_i)$ avec $i \in \{1; 2; \dots; n\}$
- 3 On résume la loi de probabilité de la variable X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $p(A) \neq 0$ La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Événements indépendants :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

L'espérance mathématique de la variable X	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \dots + x_n \times p_n$
La variance de la variable X	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
L'écart-type de la variable X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Épreuve répétée :

Soit p la probabilité d'un événement A , lors d'une expérience aléatoire

Si on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois durant les n épreuves est :

$$C_n^k(p)^k(1-p)^{n-k} \quad (k \leq n)$$

Loi binomiale :

Soit p la probabilité d'un événement A , lors d'une expérience aléatoire on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques si la variable aléatoire X , égale au nombre de réalisation de A durant les n épreuves alors la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

$$\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n\} \quad p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on a

$$E(X) = n \times p \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

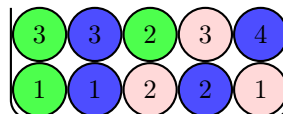
Exercice 1

On dispose une urne contient dix jetons indiscernables au toucher :

Quatre jetons bleus numérotés **1; 2; 3; 4**

Trois jetons rouges numérotés **1; 2; 3**.

Trois jetons verts numérotés **1; 2; 3**.



On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.

- 1** Déterminer le nombre des tirages possibles (ou les cas possibles) .
- 2** Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de même couleur.
- 3** Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de couleurs différentes.
- 4** Déterminer le nombre des cas tel que la somme des numéros des deux jetons est **5** .
- 5** Répondre aux même questions tel que :
 - a** On tire au hasard et successivement et sans remise deux jetons de l'urne.
 - b** On tire au hasard et successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

Exercice 2

II Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer une comité de 5 personnes.

- 1** Combien de comités peut-on envisager ?
- 2** Combien de ces comités comprennent 3 messieurs ?
- 3** Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?

II

- 1** Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres **2, 3, 4, 5, 6, 7** ?
- 2** Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ?
- 3** Parmi ceux-ci, combien sont pairs ?
- 4** Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ?

Exercice 3

On jette un dé cubique bien équilibré 2 fois successivement . Les deux valeurs lues successivement sur la face supérieure du dé sont prises comme résultat.



- 1** Quelle le nombre des résultats peut-on envisager ?
- 2** Quelle le nombre des résultats tel que la somme des deux valeurs lue sur la face supérieure du dé est inférieure ou égale à 5 ?
- 3** Quelle le nombre des résultats tel que le premier lancement du dé est un nombre paire ?

Exercice 4

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

- 1** Combien y'a-t-il de résultat possibles ?
- 2** Calculer la probabilité des événements suivants :
 - **A** "Obtenir trois boules de même couleurs "
 - **B** "Obtenir trois boules distincts deux à deux "
 - **C** "Obtenir trois boules distincts"

- **D** "Obtenir au plus deux boules rouges"
- **E** "Obtenir au moins une boule blanche "

Exercice 5

Une usine fabrique des lampes en utilisant trois machines **A**, **B** et **C**. La machine **A** produit **20%** des lampes. La machine **B** produit **30%** des lampes. La machine **C** produit **50%** des lampes. **5%** des lampes produites par **A**, **4%** de celles produites par **B** et **1%** de celles produites par **C** sont défectueuses. On choisit au hasard une lampe de la production globale.

- 1 quelle est la probabilité que la lampe choisie soit :
 - a Défectueuse et produite par la machine **A** ?
 - b Défectueuse et produite par la machine **B** ?
 - c Défectueuse et produite par la machine **C** ?
- 2 En déduire la probabilité que cette lampe soit défectueuse.
- 3 Calculer la probabilité qu'une lampe soit produite par la machine **A** sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 6

Un sac contient 4 boules numérotées : (1), (1), (1), (1), deux boules numérotées : (2), (2) et une boule numérotée (3). On suppose tous les tirages équiprobables.

On tire au hasard deux boules du sac. On considère les événements suivants :

A "Obtenir deux boules de même numéro" **B** "la somme de numéro des deux boules tirée est (4)"

- 1 Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
- 2 **A** et **B** sont-ils indépendants ?

Exercice 7

Une urne **U**₁ contient deux jetons portant le numéro 1 et quatre jetons portant le numéro 2 (les jetons sont indiscernables au toucher). Et une urne **U**₂ contient trois boules rouges et quatre boules verts. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard un jeton de l'urne **U**₁.

- 1 Calculer la probabilité des événements suivants :
A « Le jeton tiré porte le numéro 1 » et **B** « Le jeton tiré porte le numéro 2 ».
- 2 On considère dans cette question, l'expérience aléatoire suivante : On tire un jeton de l'urne **U**₁ et on marque son numéro :
 - ✓ Si le numéro est 1, on tire une seule boule de l'urne **U**₂.
 - ✓ Si le numéro est 2, on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne **U**₂.
 On note **E**_{*n*} l'évènement : "tirer exactement *n* boules rouges".
 - a Montrer que $p(E_1) = \frac{11}{21}$ et $p(E_2) = \frac{2}{21}$.
 - b Calculer la probabilité de l'évènement **A** sachant que l'évènement **E**₁ est réalisé.

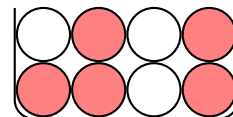
Exercice 8

Un sac contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise, trois boules du sac. Soit **X** La variable aléatoire associé au nombre de boules blanches dans un tirage

- | | |
|--|---|
| 1 Déterminer les valeurs de X | 3 Calculer $E(X)$. |
| 2 Déterminer la loi de probabilité de X . | 4 Calculer $\text{Var}(X)$ et $\sigma(X)$. |

Exercice 9

Un sac contenant 8 boules indiscernables au toucher. 5 Boules rouges, « boules blanches (voir figure ci-contre)
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.



- 1 On considère l'événement : A : «le tirage contient exactement deux boules rouges »

Calculer : $p(A) = \frac{2}{15}$.

- 2 Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules rouges restantes dans le sac après le tirage des 3 boules.

- a Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- b Calculer $E(X)$.

Exercice 10

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher).
On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

- 1 On considère les deux événements suivants :

A : " tirer trois boules de même couleur ".

B : " tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux ".

Montrer que : $p(A) = \frac{3}{44}$ et $p(B) = \frac{3}{11}$.

- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

- a Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
- b Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 11

Une urne contient huit boules portant les nombres : **1, 1, 1, 2, 2, 3**.
(les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- 1 Soit A l'événement : " tirer deux boules portant le nombre 2 " et B l'événement : " tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 1 ".

Montrer que $p(A) = \frac{3}{28}$ et que $p(B) = \frac{13}{28}$.

- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

- a Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
- b Montrer que $p(X = 1) = \frac{15}{28}$.
- c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 12

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2. On tire au hasard, simultanément, trois jetons de l'urne.

- 1 Soit A l'événement : "Les trois jetons tirés, portent des nombres différents deux à deux"

Montrer que $p(A) = \frac{5}{28}$.

- 2 Soit B l'événement : "La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 5"

Montrer que $p(B) = \frac{5}{56}$.

- 3 Soit C l'événement : " La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 4"

Montrer que $p(C) = \frac{3}{8}$.

Exercice 13

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs, trois jetons noirs et deux jetons verts. On tire au hasard, simultanément, trois jetons du sac.

1 Soient les deux événements suivants :

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$.

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

b Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$

c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 14

Une urne U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

Une autre urne U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).



I) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne U_1 .

Soit l'événement A : " On tire une seule boule rouge et deux vertes "

et l'événement B : " On tire trois boules de même couleur ".

Montrer que $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$.

II) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2 .

Soit l'événement C : " On tire trois boules rouges ". Montrer que $p(C) = \frac{6}{35}$.

Exercice 15

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher :

cinq boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2; 2

quatre boules blanches portant les nombres 1; 2; 2; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements :

A : " les trois boules tirées sont de même couleur "

B : " les trois boules tirées portent le même nombre "

C : " les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "

1 Montrer que

$$p(A) = \frac{1}{6}$$

$$p(B) = \frac{1}{4}$$

$$p(C) = \frac{1}{42}$$

2 On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage,

et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A .

- a Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X .
- b Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$.

Exercice 1

BAC 2003



Un sac contient six boules blanches portant les nombres **0, 0, 0, 1, 1, 2** et deux boules noires portant les nombres 0 et 1 (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard deux boules du sac.

- 1 Calculer les probabilités des deux événements suivants :
 A : "les deux boules tirées sont de même couleur" .
 B : "le produit des nombres portés par les deux boules est nul" .
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X . 1.5pt

Exercice 2

BAC 2003



Un sac contient six boules indiscernables au toucher et portant les nombres : **-2, -1, 0, 1, 1, 2**. On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules du sac.

- 1 On considère, après avoir effectué cette épreuve, les deux événements suivants :
 A : "parmi les boules tirées, il y a au moins une portant le nombre 1" .
 S : "la somme des nombres que portent les trois boules est nul".
 - a Calculer la probabilité de l'événement A .
 - b Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à $\frac{1}{5}$. 1pt
- 2 On répète l'épreuve précédente quatre fois (on remet à chaque fois les boules tirées dans le sac). Quelle est la probabilité pour que l'événement S soit réalisé trois fois exactement. 1pt

Exercice 3

BAC 2004



Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher : deux jetons blancs portant le nombre **1**, trois jetons rouges portant les nombres **1, 2** et **2** et quatre jetons noirs portant les nombres **1, 1, 2** et **2**. On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

- 1 Calculer les probabilités des événements suivants :
 A : "les trois jetons tirés sont de couleurs différentes (un jeton de chaque couleur)".
 B : "les trois jetons tirés portent le même nombre".
 C : "au moins un jeton parmi les jetons tirés est rouge". 0.75pt
- 2 Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$ 0.75pt

Exercice 4

BAC 2004



Un sac U_1 contient deux jetons portant le nombre **1** et quatre jetons portant le nombre **2** (les jetons sont indiscernables au toucher), un autre sac U_2 contient trois boules rouges et quatre boules vertes (les boules sont aussi indiscernables au toucher).

On tire au hasard un jeton du sac U_1 .

- 1 Calculer la probabilité de chacun des deux événements suivants :
 A : "le jeton tiré porte le nombre 1" .
 B : "le jeton tiré porte le nombre 2" .
- 2 On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante : On tire un jeton du sac U_1 et on note le nombre qu'il porte :
 — Si ce nombre est **1**, on tire une boule du sac U_2 .
 — Si ce nombre est **2**, on tire simultanément deux boules du sac U_2 .
 Soit n le nombre de boules rouges tirées du sac U_2 et E_n l'événement : "tirer exactement n boules rouges".
 - a Montrer que : $p(E_1) = \frac{11}{21}$ et $p(E_2) = \frac{2}{21}$.

- b** Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement E_1 est réalisé.

Exercice 5

BAC 2005



Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).

- 1** On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne. Soit A et B les deux événements suivants :

A : Les deux boules tirées sont noires ".

B : "Parmi les deux boules tirées, une boule au moins est blanche".

Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{15}$ et que la probabilité de l'événement B est égale à $\frac{8}{15}$. 1,25pt

- 2** On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une boule de l'urne, si la boule est blanche, on arrête le tirage et si elle est noire on la met de côté puis on tire une deuxième et dernière boule de l'urne. Soit C et D les deux événements suivants :

C : "Avoir une boule blanche au premier tirage ".

D : "Avoir une boule blanche".

- a** Calculer la probabilité de l'événement C . 0,75pt

- b** Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{8}{15}$. 1pt

Exercice 6

BAC 2005



Un sac contient quatre boules blanches et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).

- 1** On tire au hasard une boule du sac. 0,5pt

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

- 2** On tire au hasard, successivement et avec remise, cinq boules du sac. 1pt

Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches exactement ?

- 3** On tire au hasard, successivement et avec remise, n boules **du** sac.

- a** Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche au moins est :

$$p = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- b** Quel est le nombre minimum de tirage pour lequel $p \geq 0,999$?
(on prendra : $\log 3 \approx 0,48$ où $\log$ désigne le logarithme décimal).

Exercice 7

BAC 2006



Un sac U_1 contient cinq jetons : trois jetons portent le nombre **2** et deux jetons portent le nombre **3**, un autre sac U_2 contient cinq jetons : trois jetons blancs et deux jetons rouges (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard un jeton du sac U_1 et on note le nombre qu'il porte puis on tire aléatoirement et simultanément n jetons du sac U_2 où n est le nombre que porte le jeton tiré du sac U_1 .

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jetons rouges tirés.

- 1** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . 2,75pt

- 2** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . 0,25pt

Exercice 8

BAC 2007



Un sac contient sept jetons portants les nombres : **0, 0, 0, -1, 1, 1, 1**

(les jetons sont indiscernables au toucher). On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.

Soient les événements suivants :

A : " aucun jeton parmi les trois jetons tirés ne porte le nombre 0 "

B : " tirer trois jetons portant des nombres différents deux à deux "

C : " la somme des nombres portés par les trois jetons tirés est nulle "

Calculer la probabilité de chacun des deux événements A et B et montrer que la probabilité

de l'événement C est : $\frac{2}{7}$.

2,5pt

Exercice 9

BAC 2007



Un sac contient trois jetons blancs et quatre jetons noirs (les jetons sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac.

- 1 Quelle est la probabilité de tirer exactement deux jetons blancs ?
- 2 Quelle est la probabilité de tirer trois jetons de même couleur ?
- 3 Quelle est la probabilité de tirer au moins un jeton blanc ?

0,75pt

0,5

Exercice 10

BAC 2008



Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

- 1 On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
 - a Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.
 - b Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\frac{16}{21}$.
- 2 On considère dans cette question l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

1pt

1pt

Exercice 11

BAC 2008



Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges. (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1 Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?
- 2 Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.
- 3 Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au moins ?

Exercice 12

BAC 2009



Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

- 1 On considère les deux événements suivants :
 A : " tirer trois boules de même couleur ".
 B : " tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux ".
Montrer que : $p(A) = \frac{3}{44}$ et $p(B) = \frac{3}{11}$.
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.
 - a Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Une urne contient sept boules noires et deux boules blanches.

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

- 1 Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
- 2 Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{36}$ et $p(X = 1) = \frac{7}{18}$.
- 3 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

- 1 On considère les deux événements :
 A : " tirer une seule boule rouge " et B : tirer une boule blanche au moins".
 Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et que $p(B) = \frac{41}{42}$. 1pt
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.
 - a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3. 0.2
 - b Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{10}$ et $p(X = 0) = \frac{1}{6}$. 1pt
 - c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Une urne contient huit boules portant les nombres : 1, 1, 1, 2, 2, 3.

(les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- 1 Soit A l'événement : " tirer deux boules portant le nombre 2 " et B l'événement : " tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 1".
 Montrer que $p(A) = \frac{3}{28}$ et que $p(B) = \frac{13}{28}$. 1.25pt
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.
 - a Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X . 0.25pt
 - b Montrer que $p(X = 1) = \frac{15}{28}$. 0.75pt
 - c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . 0.75pt

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2. On tire au hasard, simultanément, trois jetons de l'urne.

- 1 Soit A l'événement : "Les trois jetons tirés, portent des nombres différents deux à deux"
 Montrer que $p(A) = \frac{5}{28}$. 1pt
- 2 Soit B l'événement : "La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 5"
 Montrer que $p(B) = \frac{5}{56}$. 1pt
- 3 Soit C l'événement : " La somme des nombres portés par les trois jetons tirés est égale à 4"

Montrer que $p(C) = \frac{3}{8}$.

1pt

Exercice 17

BAC 2012



Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

2 Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

1pt

3 Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

1pt

Exercice 18

BAC 2013



Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 Soient les deux événements suivants :

A : " Tirer deux boules rouges et deux boules vertes "

B : " Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées "

Montrer que $p(A) = \frac{1}{7}$ et que $p(B) = \frac{1}{3}$. 1,5pt

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.

b Montrer que $p(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . 1,25pt

Exercice 19

BAC 2013



Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs, trois jetons noirs et deux jetons verts. On tire au hasard, simultanément, trois jetons du sac.

1 Soient les deux événements suivants :

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$.

2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

b Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$ 1pt

c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . 0,75pt

Exercice 20

BAC 2014



Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher portant les nombres :

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1

1 On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac. Soit A l'événement : "La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1" Montrer que $p(A) = \frac{5}{9}$. 1pt

2 On considère le jeu suivant : Said tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac et il est considéré gagnant

s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1.

- a Montrer que la probabilité pour que Said gagne est $\frac{1}{6}$.
- b Said a joué le jeu précédent trois fois (Said remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac). Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

Exercice 21

BAC 2014



Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

- 1 On considère l'événement A : " Tirer deux cartes concernant la langue française " et l'événement B : "Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".
Montrer que $p(A) = \frac{1}{45}$ et que $p(B) = \frac{16}{45}$.
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.
 - a Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2. 0.25pt
 - b Montrer que $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 22

BAC 2015



Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

- 1 On considère l'événement A suivant : " tirer une boule blanche au moins". et l'événement B suivant : " tirer deux boules de même couleur".
Montrer que $p(A) = \frac{13}{28}$ et $p(B) = \frac{1}{4}$. 1,5pt
- 2 Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées.
 - a Montrer que $p(X = 2) = \frac{1}{28}$. 0,5pt
 - b Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 23

BAC 2015



Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs, deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne.

- 1 Soit l'événement A : "les trois jetons tirés sont de même couleur ".
Montrer que $p(A) = \frac{17}{125}$. 1pt
- 2 Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton (s) blanc (s) tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 24

BAC 2016



Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

- 1 Soit l'événement A : " les deux boules tirées sont rouges". Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$.
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes

dans l'urne.

- a** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2, 3, 4\}$.
- b** Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 25

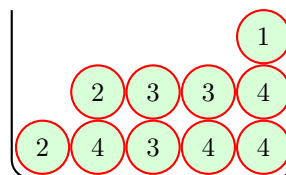
BAC 2016



Une urne contient 10 boules portant les nombres : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

(les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.



- 1** Soit l'événement A : "les deux boules tirées portent deux nombres pairs".

Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

1pt

- 2** On répète l'épreuve précédente trois fois en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

Montrer que $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

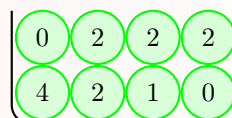
Exercice 26

BAC 2017



Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.



- 1** Soit A l'événement : "Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0" et B l'événement : "Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8".

Montrer que $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$. 1,5pt

- 2** Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

- a** Montrer que $p(X = 16) = \frac{3}{28}$

- b** Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

0,5pt

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

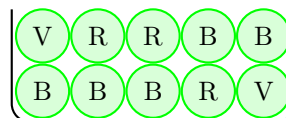
Exercice 27

BAC 2017



Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (voir figure ci-contre).

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.



- 1** Soit A l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y'a une seule boule verte seulement". et B l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y'a exactement trois boules de même couleur".

Montrer que $p(A) = \frac{8}{15}$ et que $p(B) = \frac{19}{70}$.

- 2** Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

- a** Montrer que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$.

- b** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\frac{4}{5}$.

1pt

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2; 2 et quatre boules blanches portant les nombres 1; 2; 2; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur " B : "les trois boules tirées portent le même nombre "

C : " les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre "

1 Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(C) = \frac{1}{42}$.

2 On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A .

a Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X .

b Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$.

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges portant chacune le nombre 1, 3 boules rouges portant chacune le nombre 2 et 6 boules vertes portant chacune le nombre 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne, et on considère les événements suivants :

A : " les deux boules tirées portent le même nombre "

B : " les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

C : " les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3 "

1 Montrer que $p(A) = \frac{13}{22}$ et $p(B) = \frac{6}{11}$ puis calculer $p(C)$.

2 a Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$.

0.5pt

b Les deux événements A et B sont-ils indépendants? Justifier votre réponse.

3 Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre.

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : "Obtenir trois boules vertes."

B : "Obtenir trois boules de même couleur. "

C : "Obtenir au moins deux boules de même couleur."

1 Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$.

2pt

2 Calculer $p(C)$.

1pt

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne. Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur."

B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées."

C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées."

1 Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{8}{27}$.

2pt

2 Calculer $p(C)$.

1pt

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

- 1 Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ 0.75pt
où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "
- 2 Calculer $p(B)$ 0.75pt
où B est l'évènement "Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "
- 3 Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$ 0.75pt
où C est l'évènement "Obtenir exactement une boule rouge "
- 4 Calculer $p(D)$ 0.75pt
où D est l'évènement "Obtenir au moins deux boules rouges "

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

- 1 On considère les événements suivants :
 - A : "Obtenir exactement deux boules rouges "
 - B : "Obtenir exactement une boule verte "
 - a Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$ 0,75pt
 - b Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ? 0,75pt
- 2 Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées
 - a Déterminer la loi de probabilité de X
 - b Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0; 0; 1; 1; 1; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1; 1; 1; 2; 2.

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

"On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ".

On considère les événements suivants :

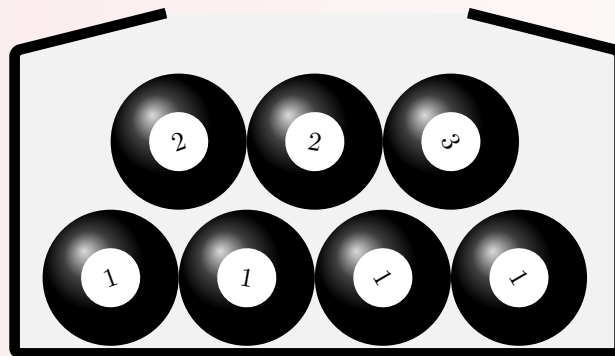
- A : "la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1" • B : "le produit ab est égal à 2"

- 1 a Calculer $p(A)$; la probabilité de l'évènement A . 0.5pt
b Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités) 0.5pt
- 2 Calculer $p(A/B)$; probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. 0.75pt
- 3 Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab
 - a Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$ 0.25pt
 - b Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0; 1; 2 et 4)
 - c On considère les événements :
 - M : "le produit ab est pair non nul" • N : "le produit ab est égal à 1 "
 Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

- 1 On tire au **hasard et simultanément** deux boules de l'urne.
 - a Calculer la probabilité de l'événement A : "tirer au moins une boule noire".
 - b Soit l'événement B : "Obtenir deux boules de même couleur". Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$
 - c On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois.
- 2 Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.
Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.
 - a Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3
 - b Montrer que $p(X = 2) = \frac{4}{15}$
 - c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
 - d Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

- 1 Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$ où A est l'événement «les deux boules tirées portent le même numéro»
- 2 Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$ où B est l'événement «La somme des numéros des boules tirées est 4»
- 3 Calculer $p(A \cap B)$
- 4 Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1 Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
- 2 Calculer la probabilité de l'événement A : «Tirer trois boules blanches ».
- 3 Montrer que la probabilité de l'événement B : «Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \frac{5}{56}$
- 4 Calculer la probabilité de l'événement C : «Obtenir au moins deux couleurs différentes ».