

Limite & Continuité

ASTUCE 5 — Quand peut-on parler de f^{-1} ?

Idée essentielle :

On ne peut pas parler de fonction réciproque au hasard.

Pour qu'une fonction f admette une réciproque, il faut d'abord qu'elle soit bijective.

Réflexe essentiel :

Sur un intervalle I , si f est :

- continue
- strictement monotone

alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

On peut alors définir :

$$f^{-1} : f(I) \rightarrow I$$

À retenir :

$$\text{continuité} + \text{stricte monotonie} \implies \text{bijection} \implies f^{-1}$$

Conclusion :

Avant de chercher f^{-1} , il faut d'abord montrer que f est bijective.

Limite & Continuité

ASTUCE 5 — Quand peut-on parler de f^{-1} ?

Le bon réflexe de méthode :

Pour montrer que f^{-1} existe, on suit en général ces étapes :

- 1) préciser l'intervalle d'étude I ;
- 2) montrer que f est continue sur I ;
- 3) montrer que f est strictement monotone sur I ;
- 4) déterminer l'ensemble image $f(I)$;
- 5) conclure que $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective.

La fonction réciproque existe alors sur $f(I)$.

Important :

Pour exploiter f^{-1} , il faut toujours connaître :

- l'intervalle de départ I ;
- l'ensemble d'arrivée $f(I)$.

$$f^{-1} : f(I) \rightarrow I$$

Schéma à retenir :

intervalle $I \longrightarrow$ continuité $\longrightarrow$ stricte monotonie $\longrightarrow$ image $f(I) \longrightarrow$ bijection $\longrightarrow f^{-1}$

On ne cherche jamais f^{-1} avant d'avoir étudié f .

ASTUCE 5

Théorème de la fonction réciproque

Exemple : étude de la fonction

On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

1 Continuité

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $]0, +\infty[$

et la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$

Donc, f est continue sur $]0, +\infty[$.

2 Dérivée

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

3 Signe de la dérivée

Pour tout $x > 0$, on a $1 + \frac{1}{x} > 0$

car $\frac{1}{x} > 0$.

4 Monotonie

Donc, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Rappels utiles :

- La fonction $\ln x$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La somme de deux fonctions continues est continue.

À retenir :

- La dérivée est l'outil pour étudier la monotonie.
- Une dérivée strictement positive sur un intervalle $\Rightarrow$ fonction strictement croissante.

Attention :

- Le domaine de définition est essentiel ici : on travaille sur $]0, +\infty[$. car $\ln x$ n'est pas définie en 0 et pour $x < 0$.

Bilan pour la suite :

f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\Rightarrow$ On peut étudier son image et conclure sur la bijection.

ASTUCE 5

Théorème de la fonction réciproque

1 Image de l'intervalle

On considère toujours la fonction $f(x) = x + \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

On a déjà montré que f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Étudions ses limites aux bornes de l'intervalle :

- Quand $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty$.
- Quand $x \rightarrow +\infty$, $x + \ln x \rightarrow +\infty$.

2 Conséquence sur l'image

Comme f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

son image est un intervalle.

$$f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}.$$

En effet, f prend toutes les valeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$.

À retenir :

- continue + strictement croissante
- image = $\mathbb{R}$
- donc f^{-1} existe

3 Bijection et réciproque

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ est une bijection.}$$

Donc la fonction réciproque existe :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[.$$

On pourra alors utiliser $f^{-1}(m)$ pour représenter l'unique solution de l'équation $x + \ln x = m$.

Conclusion :

Pour faire apparaître une fonction réciproque, il faut étudier à la fois la monotonie et l'image de l'intervalle.

ASTUCE 5

Théorème de la fonction réciproque

⑧ Exploitation de la fonction réciproque

① Existence et unicité de la solution

Comme f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
pour tout réel m , l'équation $x + \ln x = m$
admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

Cette solution est donnée par $\alpha = f^{-1}(m)$.

② Exemple d'application

Réolvons l'équation $x + \ln x = 2$ dans $]0, +\infty[$.

On calcule :

- $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 < 2$,
- $f(2) = 2 + \ln 2 > 2$ (car $\ln 2 > 0$).

Comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,
il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$
et on a $1 < \alpha < 2$.

③ Interprétation graphique

La courbe de $f : x \mapsto x + \ln x$ est strictement croissante
et coupe toute droite horizontale $y = m$ en un seul point.
Ce point a pour abscisse $f^{-1}(m)$.

Remarques :

- La bijectivité implique l'existence et l'unicité de la solution pour tout $m \in \mathbb{R}$.
- L'encadrement d'une solution s'obtient en utilisant la stricte monotonie de f (croissante ou décroissante selon le cas).
- Dans cet exemple, f est croissante, donc :
si $a < m < b$ alors
 $f^{-1}(a) < f^{-1}(m) < f^{-1}(b)$.

À retenir :

- f continue et strictement monotone sur I
 $\Rightarrow$ bijection de I sur $f(I)$.
- La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ existe.
- Pour tout $m \in f(I)$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution $x = f^{-1}(m)$.

Ouverture :

- On retrouve ici l'idée que les fonctions continues et strictement monotones sont inversibles sur leur image, ce qui permet de résoudre de nombreuses équations.