

*Académie Régionale d'Education et de Formation
Rabat-Salé-Kénitra
Direction provinciale Temara-Skhirat*

Les mathématiques

RESUME DU COURS

2^{ème} année du baccalauréat

Sciences expérimentales - Sciences et technologies industrielles



Réalisé par : **LAGDEM Mohamed**

Prof d'enseignement secondaire qualifiant

2020/2021

Sommaire :

Titre du chapitre	page
Rappels et prérequis :	
- Ensemble des nombres.	04
- L'ordre dans IR.	05
- Equations, inéquations et systèmes.	07
- Trigonométrie.	08
- Limite d'une fonction numérique.	10
Continuité d'une fonction numérique	13
Dérivation	17
Représentation graphique d'une fonction numérique	22
Suites numériques	25
Fonctions primitives	27
Fonctions logarithmes	29
Les nombres complexes	30
Fonctions exponentielles	34
Les équations différentielles	35
Calcul d'intégral	36
Géométrie de l'espace	37
Dénombrement- Probabilités	39

Cet ouvrage est destiné aux élèves du deuxième année du baccalauréat science expérimentales et sciences et technologies industrielles, c'est un résumé précis du programme des mathématiques qui peut vous aider à mémoriser les points clés de chaque chapitre.

C'est aussi un outil de révision 100% efficace pour préparer l'épreuve des mathématiques d'examen national.



Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{ID}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

- l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- l'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- l'ensemble des **nombre décimaux** $\mathbb{ID} = \{a \cdot 10^n / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$
 → Exemples : 3,25 ; 0,08696
- l'ensemble des **nombre rationnels** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$
 → Exemples : $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{1}{3}$
- l'ensemble des **nombre réels** est noté par $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des nombre rationnels et irrationnels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Opérations dans $\mathbb{R}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Puissances

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

Racines carrés

$$a \in \mathbb{R}^+ \text{ et } b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a^n} = \sqrt{a^n}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad b \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad , \quad a \neq 0$$

Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Comparaison de deux réels

$$a \leq b \quad \text{si} \quad a - b \leq 0$$

Ordre
Et
Opérations
dans $\mathbb{R}$

- si $a \leq b$ alors : $a + c \leq b + c$
- si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors : $a + c \leq b + d$
- si $c > 0$ alors : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$
- si $c < 0$ alors : $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors : $0 \leq ac \leq bd$
- si $0 < a \leq b$ alors : $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- si $a \leq b < 0$ alors : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.
- si $0 \leq a \leq b$ alors : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- si $0 \leq a \leq b$ alors : $a^2 \leq b^2$.
- si $a \leq b \leq 0$ alors : $a^2 \geq b^2$.

L'encadrement

Toute inégalité de la forme $a \leq x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$ est appelée **encadrement de x d'amplitude $b - a$** .

Propriétés

- si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors :
 $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$
- si $0 \leq a \leq x \leq b$ alors : $a^2 \leq x^2 \leq b^2$.
- si $a \leq x \leq b \leq 0$ alors : $b^2 \leq x^2 \leq a^2$.
- si $a \leq x \leq b$ tels que a et b non nuls et de même signe alors :
 $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.

Intervalles
de $\mathbb{R}$

REPRESENTATION

INEGALITE

INTERVALLE

ensemble des réels x vérifiant :

	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
	$a < x < b$	$]a; b[$
	$a \leq x < b$	$[a; b[$
	$a < x \leq b$	$]a; b]$
	$x \geq a$	$[a; +\infty[$
	$x > a$	$]a; +\infty[$
	$x \leq a$	$]-\infty; a]$
	$x < a$	$]-\infty; a[$

Union et Intersection d'intervalles

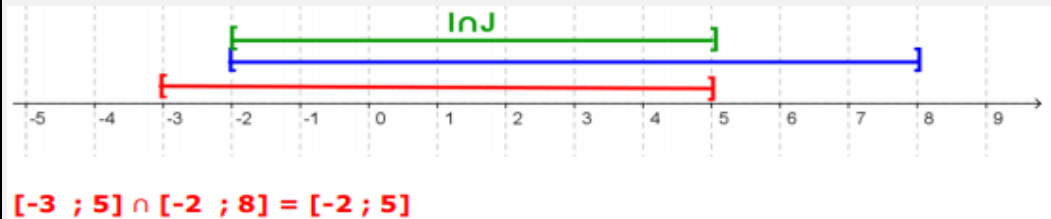
La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I **OU** dans J (au moins dans l'un des deux) : elle se note $I \cup J$ ($\cup$ se lit « union »)

L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I ET dans J (les deux à la fois) : elle se note $I \cap J$ ($\cap$ se lit « inter »).

Exemple1 (union)



Exemple2 (intersection)



Longueur , centre et rayon d'un intervalle $I = [a, b]$

-longueur de $I = [a, b]$ est : $b - a$

-centre de $I = [a, b]$ est : $\frac{a+b}{2}$

-rayon de $I = [a, b]$ est : $\frac{b-a}{2}$

valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue

$$|x| = 0 \text{ équivaut à } x = 0 \quad ; \quad |xy| = |x||y| \quad ; \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| \geq 0 \quad ; \quad |-x| = |x| \quad ; \quad |x^2| = |x|^2 = x^2 \quad ; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

($r \geq 0$)

$$\begin{aligned} |x| &= r && \Leftrightarrow && x = r && \text{ou} && x = -r \\ |x| &= |y| && \Leftrightarrow && x = y && \text{ou} && x = -y \\ |x| &\leq r && \Leftrightarrow && -r \leq x \leq r \\ |x| &\geq r && \Leftrightarrow && x \geq r && \text{ou} && x \leq -r \end{aligned}$$

Signe du binôme $ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de a		Signe de a

Signe et factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$	Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$										
$\Delta > 0$	L'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $S = \{x_1; x_2\}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td></td><td>Signe contraire de a</td><td>Signe de a</td></tr></table> (on suppose que $x_1 < x_2$)	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe contraire de a	Signe de a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$									
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe contraire de a	Signe de a									
$\Delta = 0$	L'équation admet une unique solution qui est $x_0 = \frac{-b}{2a}$. $S = \{x_0\}$	$a(x - x_0)^2$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td></td><td>Signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe de a		
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$										
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		Signe de a										
$\Delta < 0$	L'équation n'admet aucune solution dans IR $S = \emptyset$	Le trinôme n'admet pas de factorisation dans IR	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">Signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	Signe de a					
x	$-\infty$	$+\infty$											
$ax^2 + bx + c$	Signe de a												

Somme et produit des solutions d'une équation de seconde degréSi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 Alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Détermination de deux nombres dont la somme et le produit sont connusDeux nombres u et v dont la somme est S et le produit est P (càd $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$) sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$ **Systeme de deux équations du premier degré à deux inconnues**

méthode de déterminant (méthode de Cramer)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$D \neq 0$

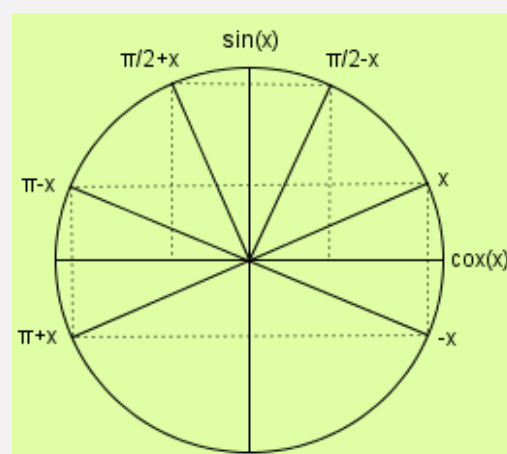
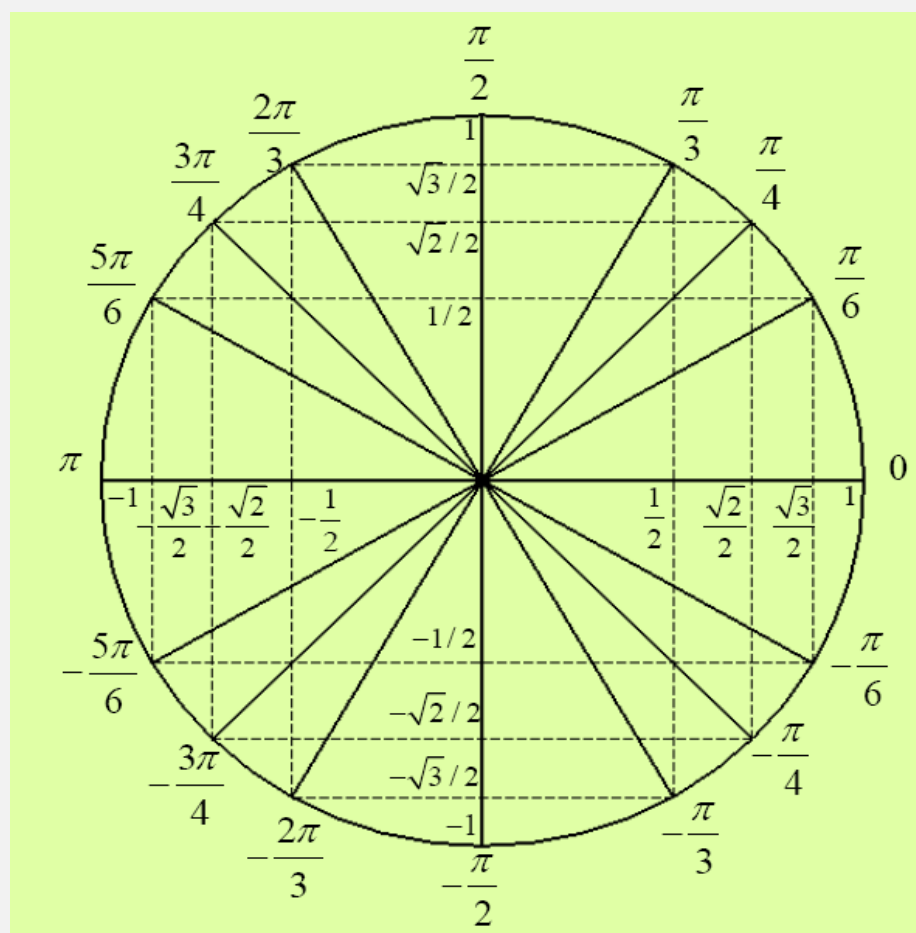
le système admet une unique solution (x, y)

tel que : $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$

avec $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$D = 0$

le système soit admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$ ($D_x = 0$ et $D_y = 0$) ou bien n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$ ($D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$)



Equations trigonométriques

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(x) = \tan(a) \Leftrightarrow x = a + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Formules de transformation :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$$\bullet \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad \bullet \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Résultats :

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
 $= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

- $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \quad t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$
- $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$

Transformation de produit en somme :

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Transformation de somme en produit :

- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Transformation de formule : $a\cos(x) + b\sin(x)$ ($a, b \neq (0, 0)$)

$$\bullet a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

tel que α un réel qui vérifie :

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

I. Limite finie d'une fonction en un point :

1. Limites des fonctions référentielles en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

Propriété (unicité de la limite) :

Si une fonction admet une limite ℓ en un réel a alors ℓ est unique.

2. limites des fonctions polynômes -limites des fonctions rationnelles en un réel :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynômes et $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- Si $Q(a) \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

3. Propriété (Limite à droite et à gauche en un point):

Soient f une fonction numérique et a et ℓ deux nombres réels.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

II. Limite infinie d'une fonction en un point :

Limites usuelles :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

III. Limite finie et infinie d'une fonction en l'infini :

1. Limite finie d'une fonction en l'infini :

Limites usuelles :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

2. Limite infinie d'une fonction en l'infini :

Limites usuelles :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
- Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

IV. Limites et opérations :

Dans les tableaux qui suivent a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, ℓ et ℓ' sont deux réels.

1. Limite de la somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.

2. Limite du produit de deux fonctions :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

3. Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4. Limite du quotient de deux fonctions :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ Ou $\ell < 0$	$-\infty$ Ou $\ell < 0$	$+\infty$ Ou $\ell > 0$	$+\infty$ Ou $\ell > 0$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.

5. Limite infini d'une fonction polynôme - d'une fonction rationnelle :

La limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) de son monôme de plus haute degré.

La limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) du quotient des monômes de plus haute degré du numérateur et du dénominateur.

Remarque :

La propriété précédente n'est valable que pour les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles et uniquement pour l'étude des limites en l'infini.

V. Limites et ordre :

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme

$I = [a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) et soit $\ell \in \mathbb{R}$

- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) ; f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) ; f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) ; |f(x) - \ell| \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{cases}$ alors: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) ; g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \end{cases}$ alors: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :

Les propriétés précédentes restent valables quand x tend vers $-\infty$ ou tend vers a à gauche ou à droite.

VI. Limites des fonctions trigonométriques

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- 2) - Pour tout $a \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$; $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$
- Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\lim_{x \rightarrow a} \tan(x) = \tan(a)$

Conséquences :

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$

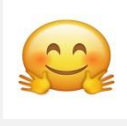
VII. Limites d'une fonction irrationnelle

Soit f une fonction définie et positive sur un voisinage d'un réel a et soit $\ell \in \mathbb{R}^+$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque: Enoncés analogues en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité en un point:



- f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Propriété f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a

Continuité sur un intervalle :

- ✓ f est continue sur $]a, b[$ s'elle est continue en tout point de $]a, b[$
- ✓ f est continue sur $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b

Continuité des fonctions usuelles:

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition
- $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \rightarrow \tan x$ est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Opération sur les fonctions continues :

Si f et g sont continues sur I

- alors les fonctions $f + g$ et $f - g$ et $f \times g$ et αf sont continues sur I , ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$
$] -\infty, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

Continuité de la composée de deux fonction :

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Résultats -si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

-si f est continue sur I alors f^n est continue sur I . ($n \in \mathbb{N}^*$)

Théorème des valeurs intermédiaires:

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \beta \text{ entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array} \right.$



$\exists \alpha \in [a, b] ; f(\alpha) = \beta$

Résultats :

- f continue sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a, b]$

- f continue et strictement monotone sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$

La méthode de dichotomie

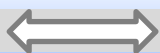
Est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation $f(x)=0$. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $f(a)<0$ et $f(b)>0$. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c)=0$.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de $[a, b]$, et de distinguer les deux cas suivants :

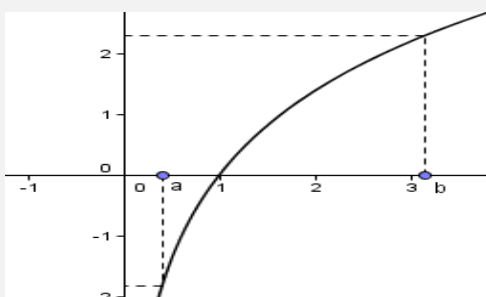
- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$
- sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation $f(x)=0$. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne

$$f(\alpha) = 0$$



(C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$



Fonction réciproque

Propriétés :

- Si f continue et strictement monotone sur I
- Et $y \in f(I)$



L'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans I

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

$$f: I \rightarrow J \text{ et } f^{-1}: J \rightarrow I$$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(\forall x \in I), f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$(\forall y \in J), f \circ f^{-1}(y) = y$$

- ✓ La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de f sur I
- ✓ Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $(D) : y = x$

La fonction racine $n^{\text{ième}}$: $(\sqrt[n]{})$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$x \in \mathbb{R}_+ , \quad y \in \mathbb{R}_+$$

$$x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

- ✓ La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- ✓ Cas particuliers : $\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Propriétés : $x, y \in \mathbb{R}^+$; $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n} = x ; \quad (\sqrt[n]{x})^n = x ; \quad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} ; \quad \sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} ; \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0) ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} ; \quad \sqrt[p]{x^{np}} = x^n$$

Limites :

$$\lim f(x) = +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = +\infty ; \quad \lim f(x) = \ell \geq 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}$$

Continuité :

si f est une fonction continue et positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

$n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}$ Pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Propriété : $r, r' \in \mathbb{Q} \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*$

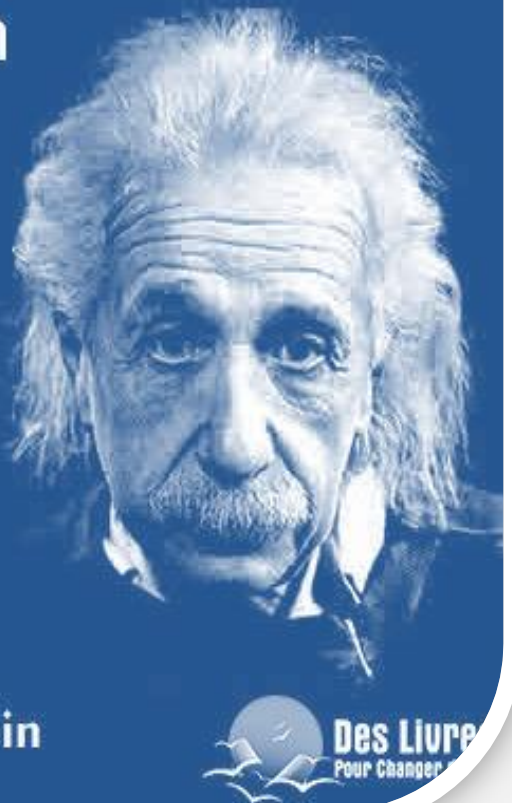
$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad , \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(xy)^r = x^r \times y^r \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad , \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

« Tout le monde est un génie.
Mais si vous jugez un poisson
sur sa capacité à grimper
dans un arbre, il passera
sa vie entière à croire
qu'il est stupide. »

- Albert Einstein



Définition :

✓ On dit que f est dérivable en a si : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$

Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

✓ On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ ℓ est appelé le nombre dérivé de f à droite en a et noté $f'_d(a)$

✓ On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell' \in \mathbb{R}$

→ ℓ' est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a et noté $f'_g(a)$

Propriété

f dérivable à droite et à gauche en a } $\Leftrightarrow f$ est dérivable en a
et $f'_d(a) = f'_g(a)$

L'équation de la tangente à (Cf)

✓ L'équation de la tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Fonction affine tangente à f

Si f est dérivable en a , la fonction $x \rightarrow f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f en a .
Autrement dit : Si $x \simeq a$: $f(x) \simeq f'(a)(x - a) + f(a)$

Interprétation géométrique de la dérivation

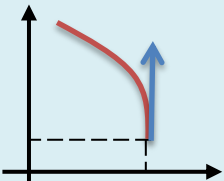
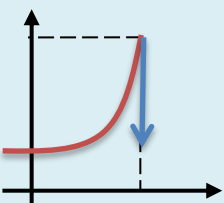
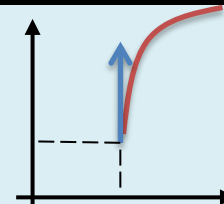
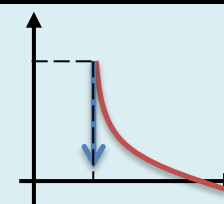
❖ f est dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'(a) = l$	(Cf) admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'(a) = 0$	(Cf) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$	

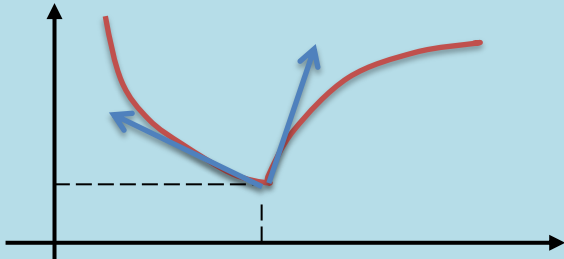
❖ f dérivable à gauche ou à droite en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'_d(a) = l$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ d'équation $\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'_d(a) = 0$	(Cf) admet une demi tangente horizontale à droite au point $A(a, f(a))$	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'_g(a) = l$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ d'équation $\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'_g(a) = 0$	(Cf) admet une demi tangente horizontale à gauche au point $A(a, f(a))$	

❖ f n'est pas dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemples)
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	

❖ Point anguleux :

f est dérivable à droite et à gauche en , mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$	(Cf) admet deux demi tangentes en $A(a, f(a))$ Le point $A(a, f(a))$ est appelé point anguleux
	

Dérivabilité des fonctions usuelles

- ✓ toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ✓ toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.
- ✓ La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. ($n \in \mathbb{N}^*$)
- ✓ Les fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ✓ La fonction $x \rightarrow \tan x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

- > $f + g$, fg , kf , f^n sont dérivables sur I .
- > Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .
- > Si $f > 0$ sur I , alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I .

{ → Voir la formulaire de dérivée page suivante }

Dérivée de la composée de deux fonction :

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivée de la fonction réciproque :

I) Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$

Et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

II) Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$

Et $(\forall x \in J) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

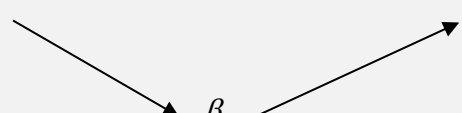
La dérivation et la monotonie

$$k \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

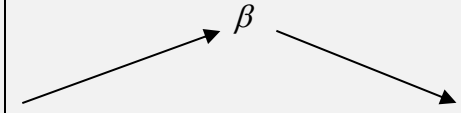
f est croissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
f est constante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

Extremums d'une fonction

Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum en a

x	α
$f'(x)$	-  +
$f(x)$	

β Valeur minimale

x	α
$f'(x)$	+  -
$f(x)$	

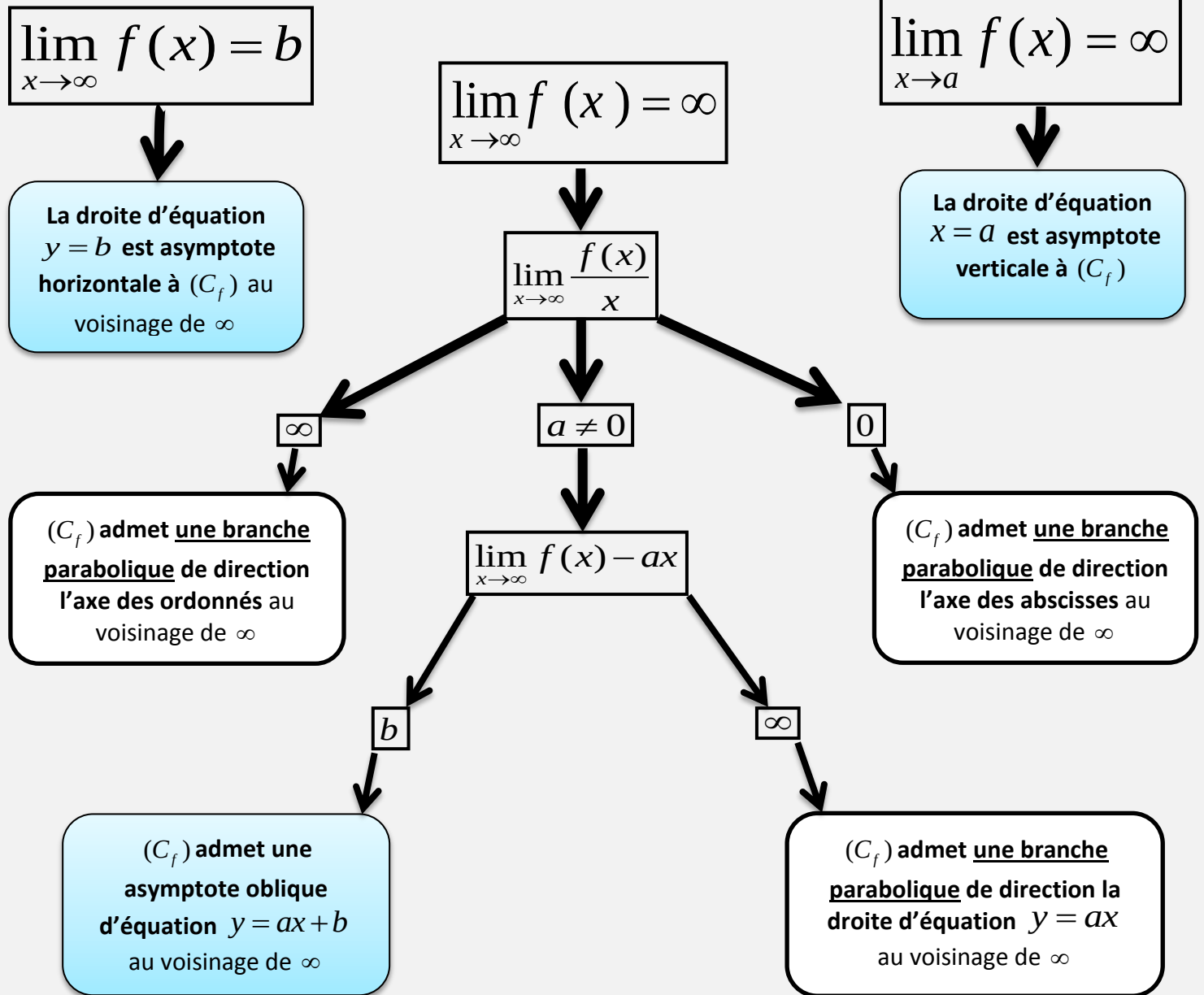
β valeur maximal

Formulaire de dérivées

Dérivée des fonctions usuelles	Opérations sur les fonction dérivées
$(a)' = 0$	$(af)' = af'$
$(x)' = 1$	$(f + g)' = f' + g'$
$(ax)' = a$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$(f^n)' = nf' f^{n-1}$
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$(\sqrt[n]{f})' = \frac{1}{n} \frac{f'}{\sqrt[n]{f}^{n-1}}$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$(fog)' = g' \times f'og$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	$(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$

(avec $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions numériques)

Branches infinies :



PROPRIÉTÉ

Si : $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors :

→ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞ .



Concavité d'une courbe – point d'inflexion :

Définitions	✓ (C_f) est convexe sur I s'il est au dessus de chacune de ses tangentes sur I ✓ (C_f) est concave sur I s'il est au dessous de chacune de ses tangentes sur I ✓ $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si , en A , (C_f) traverse sa tangente.													
Propriétés	✓ $f'' \geq 0$ sur $I \iff (C_f)$ est convexe sur I ✓ $f'' \leq 0$ sur $I \iff (C_f)$ est concave sur I ✓ f'' <u>s'annule en changeant de signe en a</u> alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f)	<table><tr><td>x</td><td colspan="3">a</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr><tr><td>Concavité de (C_f)</td><td>Convexe </td><td>Point d'inflexion $A(a, f(a))$</td><td>concave </td></tr></table>	x	a			$f''(x)$	+	○	-	Concavité de (C_f)	Convexe 	Point d'inflexion $A(a, f(a))$	concave
x	a													
$f''(x)$	+	○	-											
Concavité de (C_f)	Convexe 	Point d'inflexion $A(a, f(a))$	concave 											
Propriété	Si f' <u>s'annule en a et ne change pas de signe</u> alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) 													

Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction :

➤ Centre de symétrie :

Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie de (C_f) ssi :

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

➤ Axe de symétrie :

La droite $(\Delta): x = a$ est axe de symétrie de (C_f) ssi :

$$(\forall x \in D_f): \quad 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$



REMARQUE :

- ✓ Si f est **paire** alors (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ✓ Si f est **impaire** alors (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Compléments

➤ La position relative de (C_f) et d'une droite (Δ) d'équation : $y = ax + b$

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ sur un intervalle I , on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur I

- ❖ Si $f(x) - (ax + b) > 0$ pour tout x de I alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur I .
- ❖ Si $f(x) - (ax + b) < 0$ pour tout x de I alors (C_f) est au-dessous de (Δ) sur I .

➤ L'intersection de (C_f) et les axes du repère

- Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$
- Pour déterminer l'intersection de (C_f) et l'axe des ordonnées on calcule $f(0)$

Plan d'étude d'une fonction

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
- Réduire éventuellement cet ensemble par la recherche de la parité et de la périodicité de la fonction.
- Etudier la continuité de la fonction.
- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de l'ensemble d'étude.
- Chercher les branches infinies de la courbe.
- Etudier la dérivabilité de la fonction.
- Déterminer la dérivabilité de la fonction aux points où les théorèmes de dérivabilité ne s'appliquent pas. Interpréter géométriquement ces limites en termes de tangentes.
- Calculer la dérivée de la fonction et étudier le signe de cette dérivée (une étude de fonction auxiliaire est parfois nécessaire).
- En déduire le sens de variation de la fonction.
- Résumer tous les résultats précédents dans un tableau après en avoir vérifié la cohérence. Calculer les coordonnées des points « particuliers » rencontrés dans l'étude et des points à tangente horizontale ($f'(x) = 0$).
- Calculer la dérivée seconde pour étudier la convexité de la fonction et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.
- Tracer la courbe représentative de la fonction :
 - Choisir astucieusement la position du repère dans le plan et l'unité de longueur si elle n'est pas donnée dans l'énoncé. Sinon, respecter l'unité imposée par l'énoncé.
 - Placer les asymptotes et les points particuliers (avec leur tangente).
 - Tracer la courbe en plaçant quelques autres points sans oublier de vérifier la cohérence avec le tableau de variations

définition	Toute fonction définie de I partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ appelée une suite numérique
-------------------	--

Suite majorée	$(U_n)_{n \in I}$ majorée par M $\iff (\forall n \in I) \quad U_n \leq M$
Suite minorée	$(U_n)_{n \in I}$ minorée par m $\iff (\forall n \in I) \quad U_n \geq m$
Suite bornée	$(U_n)_{n \in I}$ bornée $\iff (U_n)_n$ majorée et minorée $(\forall n \in I) \quad m \leq U_n \leq M$

Suite décroissante	Suite croissante
$(\forall n \in I) \quad U_{n+1} - U_n \leq 0$	$(\forall n \in I) \quad U_{n+1} - U_n \geq 0$
$\downarrow$	$\downarrow$
$(\forall n \geq n_0) \quad U_n \leq U_{n_0}$	$(\forall n \geq n_0) \quad U_n \geq U_{n_0}$

	Suite géométrique	Suite arithmétique
définition	$U_{n+1} = qU_n$ q la raison de la suite géométrique	$U_{n+1} = U_n + r$ r la raison de la suite arithmétique
le terme général	$U_n = U_0 \times q^n$ $\forall (n, p) \in I^2 \quad U_n = U_p \times q^{n-p}$	$U_n = U_0 + nr$ $\forall (n, p) \in I^2 \quad U_n = U_p + (n-p)r$
La somme de termes consécutifs	$S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$ $S_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$ $S_n = (n - p + 1)U_p \quad q = 1$	$S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$ $S_n = \frac{n - p + 1}{2} (U_p + U_n)$
trois termes consécutifs	a et b et c trois termes consécutifs $a \times c = b^2$	a et b et c trois termes consécutifs $a + c = 2b$

Convergence d'une suite numérique :

Définitions	$(U_n)_n$ est une suite convergente si elle admet une limite finie càd $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$
	$(U_n)_n$ est une suite divergente si elle n'est pas convergente

Limite de la suite (n^α) ($\alpha \in \mathbb{Q}^*$)

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim n^\alpha = 0$	$\lim n^\alpha = +\infty$

Limite de la suite (q^n) ($q \in \mathbb{R}$)

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
<i>n'admet pas de limite</i>	$\lim q^n = 0$	$\lim q^n = 1$	$\lim q^n = +\infty$

Critères de convergences

➤ <i>Toute suite croissante et majorée est convergente</i> ➤ <i>Toute suite décroissante et minorée est convergente</i>	
$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim u_n = +\infty \end{cases}$	$\Rightarrow \lim v_n = +\infty$
$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim v_n = -\infty \end{cases}$	$\Rightarrow \lim u_n = -\infty$
$\begin{cases} u_n - l \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow \lim u_n = l$
$\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim w_n = \lim v_n = l \end{cases}$	$\Rightarrow \lim u_n = l$

Suite de la forme $v_n = f(u_n)$:

$\begin{cases} (U_n)_n \text{ suite convergente} \\ \lim u_n = l \\ f \text{ est continue en } l \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{cases} (v_n)_n \text{ est convergente et} \\ \lim v_n = f(l) \end{cases}$
---	---

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

$(U_n)_n$ Suite définie par son première terme u_{n_0} et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$	
$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f(I) \subset I \\ u_{n_0} \in I \\ (U_n)_n \text{ suite convergente} \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{cases} \text{la limite de } (U_n)_n \text{ est} \\ \text{la solution de l'équation} \\ f(x) = x \text{ dans } I \end{cases}$

Définition	On dit que F est une fonction primitive de la fonction f sur un intervalle I , si F est dérivable sur I Et $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$
Propriétés	- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur cet intervalle. - Si F est une fonction primitive de f sur I alors l'ensemble des fonctions primitives de f sur I est l'ensemble des fonction définie sur I par : $x \rightarrow F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ - Soient x_0 de I et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive G de la fonction f sur I qui vérifie la condition : $G(x_0) = y_0$

Fonctions primitives des fonctions usuelles :

F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I

$f(x)$	$F(x)$	L'intervalle I
0	c	$\mathbb{R}$
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^r ($r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $r > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $r < 0$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$

(suite)

f(x)	F(x)	L'intervalle I
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les primitives :

F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I

La fonction f	Primitive F de f	L'intervalle I
$U' + V'$	$U + V$	<i>l'intervalle où U et V sont dérivables</i>
$\alpha U'$	αU	<i>l'intervalle où U est dérivable</i>
$U' \times U^r$	$\frac{1}{r+1} U^{r+1}$	<i>l'intervalle où U est dérivable et U^r est définie</i>
$\frac{U'}{U^2}$	$-\frac{1}{U}$	<i>l'intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas</i>
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$	<i>l'intervalle où U est dérivable et strictement positive</i>
$\frac{U'}{U}$	$\ln U $	<i>l'intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas</i>
$U' e^U$	e^U	<i>l'intervalle où U est dérivable</i>

“Faire des mathématiques,
c'est comme faire
une longue randonnée,
sans sentier et sans fin
en vue.”

Maryam Mirzakhani
médaille Fields



Fonctions logarithmes

Définition

✓ $\ln$ (logarithme népérien) est la primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(1) = 0$$

propriétés

✓ $\ln$ est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

✓ $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\bullet \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$$

$$\bullet \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\bullet \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$			

Propriétés algébriques

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (x, y \in]0, +\infty[)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\bullet \ln(x^r) = r \ln(x) \quad r \in \mathbb{Q}$$

Le nombre e

$$\ln(e) = 1$$

$$e \approx 2,71$$

$$\ln(e^r) = r$$

$$r \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$$

Les limites :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

La dérivation :

Si u est dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $x \rightarrow \ln|u(x)|$

est dérivable sur I et on a : $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction logarithme de base a :

Définition	$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ avec a un réel strictement positif et différent de 1
Résultats	$\bullet \log_a(a) = 1$ $\bullet \log_e(x) = \ln(x)$ $\bullet \log_a(a^r) = r$
Logarithme décimal	Est La fonction logarithme de base 10, on la note $\log$ ✓ $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ $\log(10^r) = r$

L'ensemble $\mathbb{C}$ -L'écriture algébrique :

- ✓ L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$
- ✓ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = x + iy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $i^2 = -1$
- ✓ L'écriture $x + iy$ appelée la forme algébrique de z
- ✓ Le nombre x appelé la partie réel de z et noté $Re(z)$
- ✓ Le nombre y appelé la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

✓ Si $Im(z) = 0$ alors z est un réel

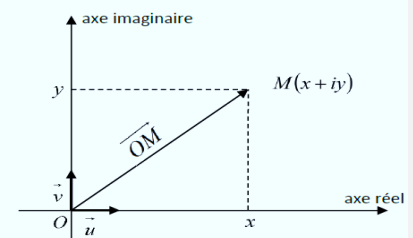
✓ Si $Re(z) = 0$ et $Im(z) \neq 0$ alors z est un imaginaire pur

La représentation géométrique d'un nombre complexe

le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- ✓ Le point $M(x, y)$ appelé image de z noté $M(z)$
- ✓ Le nombre z appelé affixe de M et noté z_M
- ✓ Le nombre z appelé affixe de $\vec{OM}$ et noté $z = aff(\vec{OM})$
- ✓ L'affixe de $\vec{AB}$ est $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$



La notion	La relation complexe
I le milieu de $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
A et B et C points alignés	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Le conjugué d'un nombre complexe

Définition

soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

Propriétés

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad z' \neq 0$

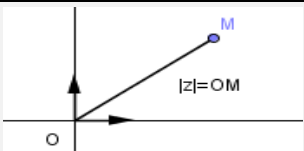
- z un nombre réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
- z un imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i Im(z)$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Le module d'un nombre complexe

Définition

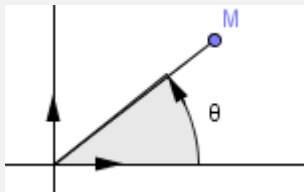
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Le module de z est le nombre réel positive $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés	$ z \times z' = z \times z' $	$ z^n = z ^n$	$ z = OM$	
	$ \bar{z} = z $	$ -z = z $		
	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$		

La distance AB	$AB = z_B - z_A $
------------------	--------------------

L'argument d'un nombre complexe-la forme trigonométrique

Définition	L'argument de z est tout mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OM})$ (M est l'image de z) et noté $\arg(z)$ $\arg(z) = \theta[2\pi]$	
------------	---	---

cas particulières	$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$	$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
	$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(iz) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$	$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(iz) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

Mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{CD})$	$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
--	---

La forme trigonométrique	Soit z un complexe $\arg(z) = \theta[2\pi]$ et $ z = r$
	▪ La forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

La forme exponentielle	Soit z un complexe $\arg(z) = \theta[2\pi]$ et $ z = r$	▪ Autre notation $re^{i\theta} = [r, \theta]$
	La forme exponentielle de z est : $z = re^{i\theta}$	

Propriétés	▪ $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ ▪ $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ ▪ $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ ▪ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ ▪ $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ ▪ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	▪ $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ ▪ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$ ▪ $\arg(zz') \equiv (\arg(z) + \arg(z'))[2\pi]$ ▪ $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$ ▪ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ ▪ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
------------	---	---

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Points cocyclique

A et B et C et D des points cocyclique si

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des points $M(z)$ qui vérifient

$$|z - z_A| = r$$

$$\Leftrightarrow AM = r$$

La notion géométrique

Cercle de centre A et de rayon r

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

la médiatrice de $[AB]$

Nature du triangle

ABC triangle rectangle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = re^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

ABC triangle isocèle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\theta}$$

ABC triangle isocèle et rectangle en A

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

ABC triangle équilatérale

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a et b et c des réels)

L'équation $z^2 = a$
 $z \in \mathbb{C}$

Solutions

$$a > 0$$

$$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$$

$$a = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$a < 0$$

$$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$

$a \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$

Solutions

$$\Delta > 0$$

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

$$\Delta = 0$$

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$\Delta < 0$$

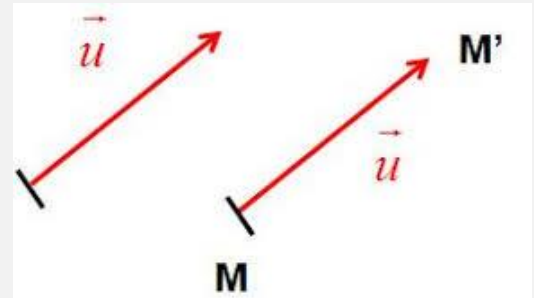
$$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$$

Ecriture complexe des transformations géométriques

$$M(z), M'(z')$$

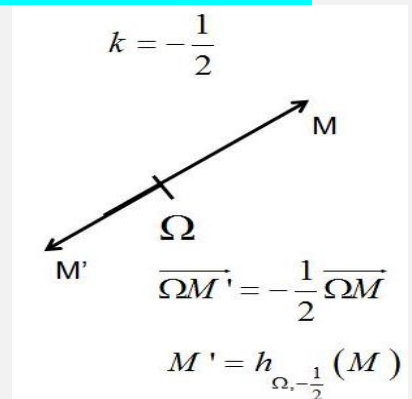
$T_{\vec{u}}$: T translation de vecteur $\vec{u}$

$$\begin{aligned} T(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}} \end{aligned}$$



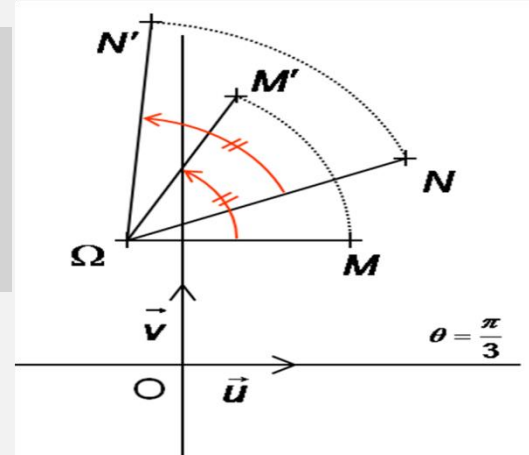
$h(\Omega, k)$: h homothétie de centre Ω et de rapport k

$$\begin{aligned} h(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega} \end{aligned}$$



$R(\Omega, \theta)$: R rotation de centre Ω et d'angle θ

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega} \end{aligned}$$



N.B : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

En résumé :

La transformation	L'écriture complexe
La translation T de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + z_{\vec{u}}$
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k	$z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$
La rotation R de centre Ω et d'angle θ	$z' = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$

Définition	✓ La fonction réciproque de $\ln$ s'appelle la fonction exponentielle népérienne notée $\exp$ ✓ Notation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$ ✓ La fonction est $\exp$ définie sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0, +\infty[\quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$ $\exp(0) = 1 \quad \exp(1) = e$
propriétés	✓ $\exp$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ✓ $\exp$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad e^{\ln(x)} = x$
Propriétés algébriques	$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r \quad r \in \mathbb{Q}$

Les limites :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad n \in \mathbb{N}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

La dérivation :

✓ $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$
✓ Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

La fonction exponentielle de base a :

Définition	$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ avec a un réel strictement positif et différent de 1
La dérivée	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = (\ln a) a^x$
Cas particulière $a = 10$	La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \rightarrow 10^x$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0, +\infty[\quad 10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$

Solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ $(a \neq 0)$

La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions y

définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Solution de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E)

→ On calcule le discriminant Δ :

Si :	Alors l'équation caractéristique admet :	Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\Delta > 0$	Deux solutions réels r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ Tels que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	Solution double r_0	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ Tels que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = p + iq$ et : $r_2 = \overline{r_1}$	$y(x) = e^{px} (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$ tels que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Définition

Soient f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I et a et b deux éléments de I

- L'intégrale de f de a à b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b k dx = k(b - a)$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (la linéarité)
- $\int_a^b K f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$

L'intégrale et l'ordre

- $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

La valeur moyenne

f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I tel que $b > a$

- Il existe un nombre c de $[a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
- Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ appelé la valeur moyenne de f sur $[a, b]$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

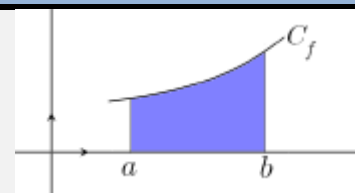
- Le choix de u (fonction à dériver) se fait selon l'ordre de L vers S

L	P	E	S
$\ln$	polynôme	$\exp$	$\sin ; \cos ; \tan$

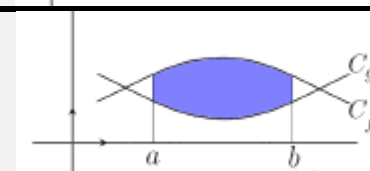
Calcul des aires

- L'air du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) ua$

- ua est l'unité de l'air $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



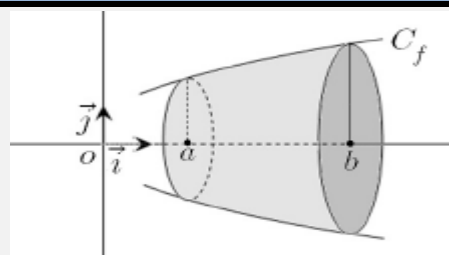
- L'air du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les droites $x = a$ et $x = b$ est $\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) ua$



Calcul des volumes

- Le volume du solide engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[a, b]$ est donné par $\left(\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right) \times uv$

- uv est l'unité de volume $uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$



Forme analytique du :

-Produit scalaire :

-Norme d'un vecteur :

- Distance :

- Produit vectoriel :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

propriétés

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Droite $D(A, \vec{u})$
passant par A et de
vecteur directeur
 $\vec{u}(a, b, c)$

Représentation paramétrique de la droite (D): $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Distance d'un point M à la droite (D): $d(M, (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Plan dans l'espace

Equation cartésienne d'un plan (P)

$$(P): ax + by + cz + d = 0$$

$\Leftrightarrow \vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Distance d'un point Ω au plan (P): $d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

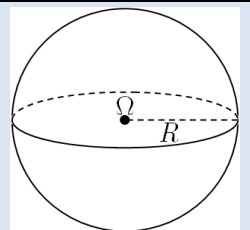
Si les points A et B et C ne sont pas colinéaires alors $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Sphère

Equation cartésienne d'une sphère (S)

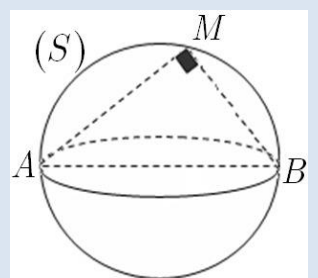
de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R :

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



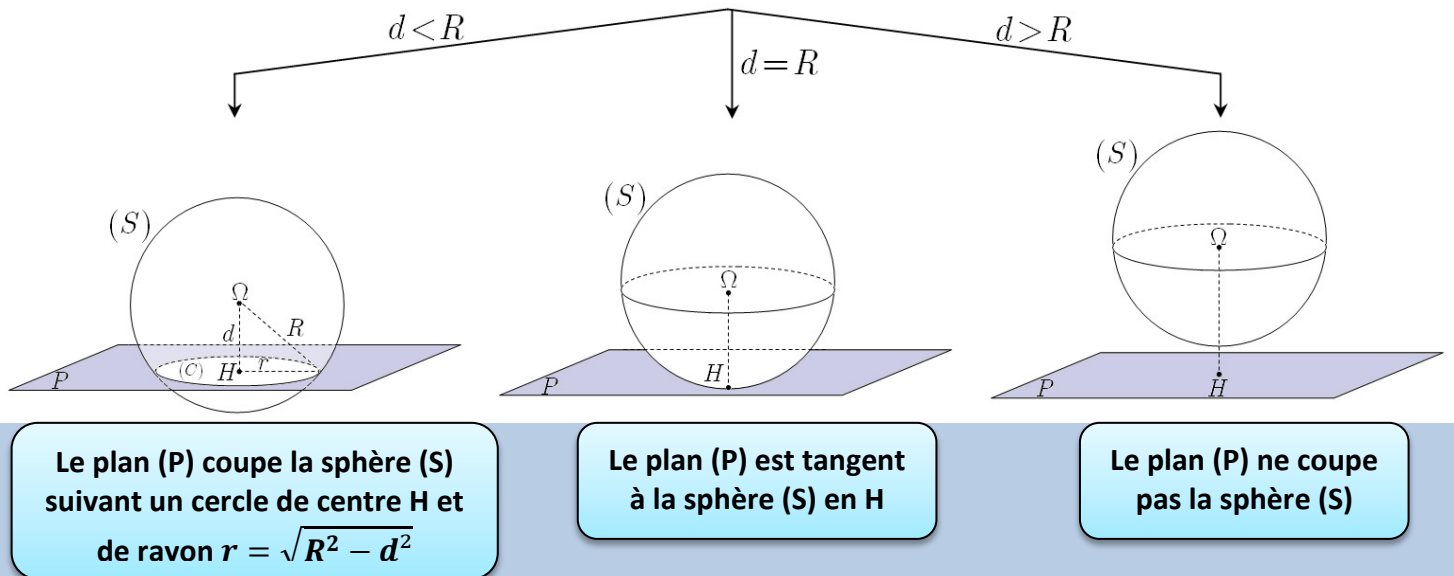
➤ On détermine l'équation cartésienne d'une sphère (S) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres en utilisant l'équivalence

suivant : $M \in (S) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$



❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'un plan (P) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P), on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (P))$



Equation cartésienne d'un plan (P) tangent à une sphère $S(\Omega, R)$ en un point A

Méth1 :

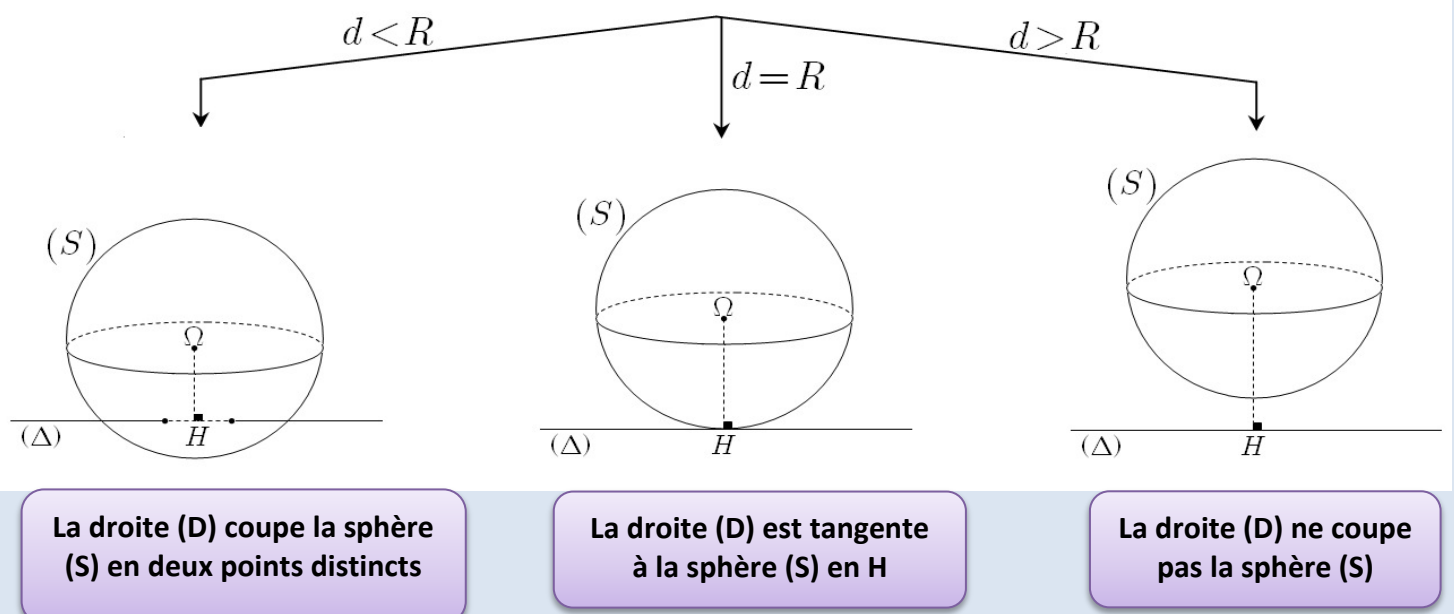
on utilise l'équivalence : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

Méth2 :

$\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal au plan (P) ... etc

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'une droite (D) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (D), on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (D))$



L'aire d'un triangle ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

L'aire d'un parallélogramme ABCD :

$$S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

Dénombrement :

Définitions	✓ Le cardinal de E est le nombre des éléments de E et on le note : $Card(E)$ ✓ Le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
Propriétés	✓ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ ✓ $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$ $A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

- Le principe fondamental du dénombrement**

Dans une situation de dénombrement contient p choix

Si le 1^{er} choix se réalise par n_1 façon distinctes

et le 2^{ème} choix se réalise par n_2 façon distinctes

.....

et le $p^{ème}$ choix se réalise par n_p façon distinctes

Alors le nombre des possibilités est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

Arrangements	✓ Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n éléments est : $A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\leq n$) ✓ Le nombre des arrangements avec répétition de p élément pris parmi n élément est : n^p (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)
Permutations	✓ Tout arrangement de n éléments pris parmi n éléments est appelé une permutation de n éléments, le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$
Combinaisons	Soit E un ensemble de cardinal n (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $p \leq n$) Toute partie de E contenant p éléments est appelée combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E ✓ Le nombre des combinaisons de p élément pris parmi n est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Quelques types de tirage :

On tire p éléments parmi n éléments (p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$)

type de tirage	nombre des possibilités	L'ordre
simultanément ($p \leq n$)	C_n^p	N'est pas important
Successivement et sans remise ($p \leq n$)	A_n^p	important
Successivement et avec remise	n^p	important

Nombre de possibilités d'arrangement de n éléments

On dispose de n_1 éléments de type A, et de n_2 éléments de type B, de n_3 éléments de type C, parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$

➤ le nombre de possibilités d'arranger ces n éléments est : $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

Probabilités

Vocabulaires
et
définitions

- **Expérience aléatoire** : Toute expérience dont on ne connaît pas ses résultats d'avance
- **Possibilité** : tout résultat d'une expérience aléatoire
- **Univers des possibilités** : l'ensemble de toutes les éventualités, noté Ω
- **L'événement** : toute partie de Ω
- **L'événement contraire** : est l'événement noté $\bar{A}$ et qui vérifie : $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- **L'événement $A \cap B$** : se réalise lorsque **A et B sont réalisés en même temps**
- **L'événement $A \cup B$** : se réalise lorsque l'un au moins des éventualités **A ou B** est réalisé.
- **A et B sont incompatibles (ou disjoints)** : si $A \cap B = \emptyset$

Propriétés	$P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
La probabilité d'un événement	• Equiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$
La probabilité conditionnelle	• La probabilité de B sachant que A est réalisé $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ($P(A) \neq 0$)
L'indépendance	• A et B sont indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Répétition d'expériences identiques et indépendantes	Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire on répète cette expérience n fois. La probabilité de réalisation de A, exactement k fois est : $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

Variables aléatoires

loi de probabilité d'une variable aléatoire	une variable aléatoire est toute application X de Ω vers $\mathfrak{R}$												
	• <u>L'ensemble des valeurs prise par X</u> est noté :												
	$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$												
	• <u>La détermination de la loi de probabilité de X</u> :												
	signifie le calcul des probabilités des événements ($X = x_i$) avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$												
	On résume la loi de probabilité de X dans le tableau :												
	<table><tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>...</td><td>x_n</td></tr><tr><td>$p(X = x_i)$</td><td>p_1</td><td>p_2</td><td>p_3</td><td>...</td><td>p_n</td></tr></table>	x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n
x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n								
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n								
	✓ Remarque : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$												
▪ L'espérance mathématique : $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$													
▪ La variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \dots + x_n^2 \cdot p_n - (E(X))^2$													
▪ L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$													
La loi binomiale	Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire on répète cette expérience n fois.												
	La variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de A s'appelle variable aléatoire binomiale de paramètres n et p												
	on a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$												
	$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$												
	$E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$												

**J'espère que cet ouvrage
rendra des services aux
élèves, j'accueillerai avec
attention les remarques que
les lecteurs voudront bien
me présenter.**

Bon courage :)

Contact :



lagdem.smhd@gmail.com



www.facebook.com/lagdem.maths/

