

CALCUL INTEGRAL

Le génie est fait de 1 % d'inspiration et de 99 % de transpiration. Il faut encore travailler.

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 (-2x^2 + 5x + 3) dx$

2) $I = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) dx$

3) $I = \int_{-3}^2 (|x^2 - x - 2| + |x| + 2) dx$

4) $I = \int_1^2 \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2} dx$

5) $I = \int_0^1 \left[\frac{2x+1}{2} - \frac{1}{2x+1} \right] dx$

6) $I = \int_0^1 \frac{3dx}{3-2x^4} dx$

7) $I = \int_1^2 \frac{3x+6}{x^2+4x+3} dx$

8) $I = \int_2^4 \frac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x^2} dx$

9) $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx$

10) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x + \cos 2x) dx$

11) $I = \int_0^{2\pi} (|\sin t| + |\cos t|) dt$

12) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx$

13) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^4 x dx$

14) $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \tan^2 x}$

15) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

16) $I = \int_0^{\pi} (2 \sin 2x - \cos x) dx$

17) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

18) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t + \tan^3 t) dt$

19) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$

20) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x dx$

21) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x + 2 \sin^2 x) dx$

22) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin 2x dx$

23) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$

24) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$

25) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$

26) $I = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx$

27) $I = \int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} dx$

28) $I = \int_{-4}^0 \sqrt{1-2x} dx$

29) $I = \int_{-1}^0 (x^2 - 6x) (x-3) dx$

30) $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

31) $I = \int_2^4 |2x-4| (x^2-4x+3) dx$

32) $I = \int_{-2}^3 |-x^2+x+2| (-2x+1) dx$

$$33) \quad I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$34) \quad I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$35) \quad I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$36) \quad I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$37) \quad I = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$38) \quad I = \int_0^\pi \frac{\sin t}{e^{\cos t}} dt$$

$$39) \quad I = \int_1^2 2^x dx$$

$$40) \quad I = \int_0^1 2^t x 3^{t-1} x 4^{t-2} dt$$

$$41) \quad I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (-6e^{2x} - e^{-x}) dx$$

$$42) \quad I = \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$$

$$43) \quad I = \int_0^1 \frac{x}{3} e^{x^2} dx$$

$$44) \quad I = \int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx$$

$$45) \quad I = \int_0^2 5 \sin t e^{\cos t} dt$$

$$46) \quad I = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 3e^x - 5}{e^x} dx$$

$$47) \quad I = \int_0^1 \frac{1 + e^x}{x + e^x} dx$$

$$48) \quad I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \right) dx$$

$$49) \quad I = \int_{-1}^1 |e^{-x} - 1| dx$$

$$50) \quad I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx$$

$$51) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - 3 \cos x} dx$$

$$52) \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan t + \frac{1}{\tan t} \right) dt$$

$$53) \quad I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2 - x) e^x dx$$

$$54) \quad I = \int_0^1 \frac{x + 3}{\sqrt{2x + 1}} dx$$

$$55) \quad I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$56) \quad I = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$57) \quad I = \int_1^e \ln x dx$$

$$58) \quad I = \int_0^{e-1} \ln(1 + x) dx$$

$$59) \quad I = \int_1^e \frac{1 + \ln t}{t} dt$$

$$60) \quad I = \int_1^e x \ln^2 x dx$$

$$61) \quad I = \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$62) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos 3x dx$$

$$63) \quad I = \int_0^1 (x^2 - 5x + 5) e^{-x} dx$$

$$64) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x + 1) \cos x dx$$

$$65) \quad I = \int_0^1 x 2^{3x} dx$$

$$66) \quad I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$67) \quad I = \int_0^\pi x e^x \cos x dx$$

EXERCICE 2

- 1) Démontrer que quel que soit x réel :

$$\sin^2 x - \sin^4 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$$

- 2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \sin^4 x) dx$

EXERCICE 3

On donne $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

- a) Linéariser $f(x)$.

- b) Calculer l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$

EXERCICE 4

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$$

- Calculer $I + J$.
- Calculer $I - J$. (On utilisera une méthode d'intégration par parties).
- En déduire I et J .

EXERCICE 5

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$$

- Calculer $I + J$.
- Soit f la fonction numérique de la variable

réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.

- Calculer $f'(x)$
- En déduire $I - J$.
- Calculer I et J .

EXERCICE 6

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

- Calculer I .
- Soit la fonction $f : [0; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

- a) Démontrer que f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et

que pour tout x appartenant à cet

$$\text{intervalle : } f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

- b) En déduire une relation entre I et J puis calculer I et J .

EXERCICE 7

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t dt \text{ et}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t dt$$

- 1) En intégrant par parties calculer :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t dt \text{ puis en déduire } I - J.$$

- 2) Calculer $I - J$. En déduire I et J .

EXERCICE 8

$$\text{Soit } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + 2 \sin x} \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{1 + 2 \sin x}$$

Calculer $I + J$, I puis J .

EXERCICE 9

Soit :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

$$\text{et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

- Calculer $I - J$ et $I + J + K$.
- Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire $I + J - 3K$ puis I , J et K .

EXERCICE 10

- 1) On considère les Intégrales :

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 4x dx \text{ et } B = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 4x dx$$

Calculer $A + B$, $A - B$ puis en déduire A et B .

- 2) On considère maintenant :

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx dx \text{ et } D = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx dx$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls. Calculer C et D .

EXERCICE 11

- 1) a) Montrer que

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\text{b) Calculer } f(t) = \int_0^t (4 \sin^4 x - \frac{3}{2}) dx$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $f(t) = 0$

- 2) Soit les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^2 x dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x dx$$

- Calculer $I + J$ et $I - J$.
- En déduire I et J .

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \text{ sur } [0; \frac{\pi}{4}]$$

- 1) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

a) Calculer $g'(x)$

b) Montrer que pour tout x réel $g(x)$ peut s'écrire

$$\text{sous la forme : } g(x) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$.

- 2) Justifier que f est définie sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ puis

calculer la valeur moyenne de f sur $[0; \frac{\pi}{4}]$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \sin 2x$

- 1) Montre que f est périodique de période π .
Etudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$. Construire sa courbe C dans un repère orthonormé (unité 3 cm).
2) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.
3) Calculer la valeur efficace de f sur $[0; \pi]$,
c'est à dire le réel $a \geq 0$ tel défini par :

$$a^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)^2 dx$$

EXERCICE 14

Soit (I_n) la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} dx$ n entier naturel

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$ on a :

$$0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos^2 x} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2) Déterminer les nombre réel a et b tels que
 $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$
3) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_2^3 f(x) dx$$

EXERCICE 16

Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_h de h .
2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que

$$\forall x \in D_h, h(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

- 3) Calculer $I = \int_1^2 h(x) dx$

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^4 - x}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2) Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels

$$\text{que : } f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

- 3) En déduire l'intégrale $I = \int_2^3 f(x) dx$

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$

- 1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels

$$\text{que : } f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1} + \frac{ce^x}{(e^x + 1)^2}$$

- 2) Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2} \text{ et } J = \int_0^1 \frac{xe^x dx}{(e^x + 1)^3}$$

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}$

- 1) Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels

$$\text{que : } f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}$$

- 2) Calculer : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1) \ln(1-x) dx$$

EXERCICE 20

Déterminer a et b tels que : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+1}$

puis calculer : $I = \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$,

$$J = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \text{ et } K = \int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

EXERCICE 21

- 1) Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2) Calculer $I = \int_2^4 \frac{dx}{x(x^2 - 1)}$

3) Calculer : $\int_2^4 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx$

EXERCICE 22

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. Pour tout nombre réel

strictement positif α , on pose $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

- 1) Montrer que f est une fonction à valeurs positives. Quel est le signe de $I(\alpha)$?
2) a) Déterminer les nombres a et b tels que pour

tout nombre réel x : $\frac{e^x}{e^x + 1} = a + \frac{b}{e^x + 1}$. En

déduire le calcul de $\int_0^\alpha \frac{dx}{1 + e^x}$

b) Calculer $f(x) + f'(x)$ puis $I(\alpha)$.

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(e^x - 1)$

- 1) Calculer $f'(x)$. En déduire la valeur de

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

2) Soit $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx$. Calculer $I - K$

puis en déduire la valeur de K .

EXERCICE 24

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$.

- 1) Calculer I_1 et I_2 .
2) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n . puis calculer I_3 et I_4 .

EXERCICE 25

Soit n un entier naturel. On considère la suite (I_n)

$$\text{définie par : } I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1 + e^x} dx$$

- 1) Calculer $I_0 + I_1$ et I_1 . En déduire la valeur de I_1
2) Calculer I_{n+1} et I_n en fonction de n . En déduire les valeurs de I_2 et I_3 .
3) Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0; 1]$. En déduire le sens de variation de (I_n) .
4) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}; \text{ en déduire un encadrement de } (I_n)$$

Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

EXERCICE 26

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$,

n étant un entier naturel non nul.

- 1) Exprimer U_n en fonction de n .
2) Montrer que la suite (U_n) est suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_1 .
3) Soit S_n la somme des n premiers termes de la

suite (U_n) . Montrer que $S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$.

- 4) Déterminer la limite de S_n .

EXERCICE 27

I. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x e^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

- 1) Etudier les variations de f .
2) Tracer la courbe (C) .
3) Soit a un nombre réel strictement positif, exprimer en cm^2 l'aire $A(a)$ du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$. Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a)$

II. Soit $n > 0$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$. En déduire I_3 et I_2 .

2) On pose : $J_n = \int_0^1 x^n dx$

- a) Calculer J_n en fonction de n .
b) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$
c) Encadrer I_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE 28

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2 + e^x}{1 - e^x} \cdot (C)$

la courbe de g dans un repère orthonormé (O, i, j) .

- 1) Déterminer le domaine de définition D_g de g puis calculer les limites de g aux bornes de D_g .
2) Etudier les variations de g puis dresser le tableau de variation de g . Tracer la courbe (C)
3) Soit α un réel supérieur à $\ln 2$. On note par E_α la portion du plan comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations $x = \ln 2$, $x = \alpha$ et $y = -1$.

a) Démontrer que $g(x) = -1 - \frac{3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

- b) Représenter E_2 .

c) Calculer $A(\alpha)$ l'aire de E_α et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

EXERCICE 29

On pose $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- 1) Soit f la fonction de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$

Calculer la dérivée de f . En déduire la valeur de K .

2) On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$

Démontrer que : $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} - K$.

Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

EXERCICE 30 (BAC S1 2005 2^e GROUPE)

On pose : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$ et

$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$

- 1) Soit f la fonction numérique définie par :
 $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right)$. Calculer $f'(x)$
- 2) En déduire I .
- 3) Vérifier que $J + 2I = K$.
- 4) A l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
- 5) En déduire les valeurs de J et K .

EXERCICE 31

Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) Soit f et F les fonctions définies par :
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $F(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$
- a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis en déduire la valeur de I_0
- b) Calculer I_1 .
- 2) On pose $J_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$ $n > 1$
- a) Montrer que $J_n = I_n + I_{n-2}$.
- b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $n I_n = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2}$.
- c) Calculer I_2 et I_3 .
- 3) Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$ on a :
 $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$. En déduire que la suite (I_n) est une suite convergente, de limite 0.

EXERCICE 32 (BAC S1 1990)

On considère les intégrales :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

- 1) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$.

En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n .

- 2) Calculer I_1 . En déduire I_3 et I_5 .

- 3) Soit f l'application qui à $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe

$f(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$

- a) Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- b) En déduire I_0 puis I_2 et I_4 .

EXERCICE 33

Calculer $I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)}$

EXERCICE 34 (BAC S1 2002 2^e GROUPE)

Soit (I_n) la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- 3) Etablir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} par une intégration par parties pour $n \geq 2$. (On pourra écrire $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$.)
- 4) Montrer que le produit $n I_n I_{n-1}$ est constant et déterminer cette constante.

EXERCICE 35

On donne sur $[0; +\infty[$: $f(x) = x^2 (1 - e^{-x})$

- 1) On donne sur $[0; +\infty[$: $h(x) = x^2 - f(x)$.

- a) Calculer $h(0)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

- b) Etudier les variations de h .

- c) Dresser le tableau de variation de h .

- 2) On désigne par P la courbe de la fonction qui à x associe x^2 et par C celle de f dans un repère

$\rightarrow \rightarrow$
 orthogonal (O, i, j) . Unités : 4 cm sur $(x'x)$, 1 cm sur $(y'y)$. Soit α un nombre réel strictement positif.

- a) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction H définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de h .

- b) Calculer $\int_0^\alpha h(x) dx$.

- c) Calculer en cm^2 l'aire $S(\alpha)$ du domaine limité par C, P et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

- d) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha)$