

Mathématiques pour Terminale S₂

21 décembre 2023

Table des matières

1	Nombres complexes	3
I	Introduction	3
I.1	Un problème historique	3
I.2	Création d'un nouvel ensemble	4
II	Nombre Complexe, forme algébrique	4
II.1	Définitions et exemples	4
II.2	Propriétés	5
II.3	Représentation géométrique d'un nombre complexe	5
II.4	Affixe d'un vecteur, du milieu d'un segment et d'un barycentre	6
II.5	Calcul dans $\mathbb{C}$	7
II.6	Conjugué d'un nombre complexe	8
II.7	Module d'un nombre complexe	9
III	Forme trigonométrique - Forme exponentielle d'un nombre complexe	10
III.1	Argument d'un nombre complexe	10
III.2	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	14
III.3	Forme exponentielle d'un nombre complexe	15
III.4	Formule de Moivre et Formules d'Euler	15
IV	Résolution d'équations	16
IV.1	Equations du type $Z^2 = U, U \in \mathbb{C}$	16
IV.2	Equation du second degré dans $\mathbb{C}$	17
IV.3	Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$	17
V	Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe	18
V.1	Racine $n^{ième}$ de l'unité	18
V.2	Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe	18

Chapitre 1

Nombres complexes

I Introduction

I.1 Un problème historique

À la fin du XVI^e siècle, on s'est intéressé à la résolution des équations du troisième degré. On montra rapidement qu'à l'aide d'un changement de variable toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$x^3 + px + q = 0$$

Cette équation admet au moins une racine réelle, dont l'expression peut se mettre sous la forme :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Un mathématicien italien de l'époque, Bombelli, s'intéressa de près à l'équation : $x^3 - 1x - 4 = 0$. qui donne alors comme solutions :

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

La racine $\sqrt{-1}$ posait un problème.

Cependant il remarqua que s'il posait $(\sqrt{-1})^2 = -1$, on obtenait en développant :

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(-1) - (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(-1) + (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Donc $x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$. On constate effectivement que 4 est solution de l'équation.

Conclusion : $\sqrt{-1}$ n'existe pas, mais permet de trouver la solution d'une équation. il s'agit d'un intermédiaire de calcul. Les nombres complexes étaient nés !!

- Au $XVII^e$ siècle ces nombres deviennent des intermédiaires de calcul courant, mais on ne les considère pas comme des nombres.
- Au $XVIII^e$ siècle on montre que tous ces nombres peuvent se mettre sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. Euler propose alors de noter $\sqrt{-1} = i$. i comme « imaginaire ».
- au XIX^e siècle Gauss montre que l'on peut représenter de tels nombres. Ils obtiennent alors le statut de nombres.

I.2 Création d'un nouvel ensemble

Cette découverte est assez fréquente en mathématique. Qu'on se rappelle les solutions des équations suivantes.

- Résolution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x + 7 = 6$.

Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les entiers relatifs, on obtient alors $x = -1$.

- Résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $3x = 1$.

Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres rationnels, on obtient alors $x = \frac{1}{3}$.

- Résolution dans $\mathbb{Q}$ de l'équation $x^2 = 2$.

Cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres réels, on obtient alors $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Cette équation n'a pas de solution donc on va construire un ensemble que l'on appelle $\mathbb{C}$ (complexe) dont l'élément principal ajouté est le nombre i tel que $i^2 = -1$. On obtient donc comme solution $x = i$ et $x = -i$. La démarche naturelle consiste donc à chercher un ensemble plus grand qui contient l'ancien, qui vérifie les mêmes propriétés et qui puisse être représenté.

II Nombre Complexe, forme algébrique

II.1 Définitions et exemples

Définition

On appelle nombre complexe tout nombre z qui peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i un nombre tel que $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemple 1

$z_1 = 2 + 3i$ ($a = 2$; $b = 3$); $z_2 = 4i$, ($a = 0$ et $b = 4$); $z_3 = 5$, ($a = 5$ et $b = 0$)

Vocabulaire et notation

- $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelée la **forme algébrique** de z .
- Le réel a est appelé partie **réelle** de z , on la note $\Re(z) = a$.
- Le réel b est appelé partie **imaginaire** de z , on la note $\Im(z) = b$.

Exemple 2

Donner $\Re(z)$ et $\Im(z)$ pour chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = -2 + i$; $z_4 = -4i$; $z_5 = 7$; $z_6 = 0$.

Remarque

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe .

- Si $a = 0$, alors $z = ib$ est appelé un nombre imaginaire pur.
- Si $b = 0$, alors $z = a$, on dit que z est un nombre réel. Tout nombre réel est un nombre complexe.
- L'ensemble de nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- 0 est à la fois un nombre réel et un nombre imaginaire pur. C'est à dire $0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in i\mathbb{R}$.

II.2 Propriétés

Propriété 1

- $z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0.$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0.$

Propriété 2

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes nulles. Autrement dit, soit $z = a + ib$, on a :

$$z = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Propriété 3

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Autrement dit, soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$; on a :

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

II.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

⋮

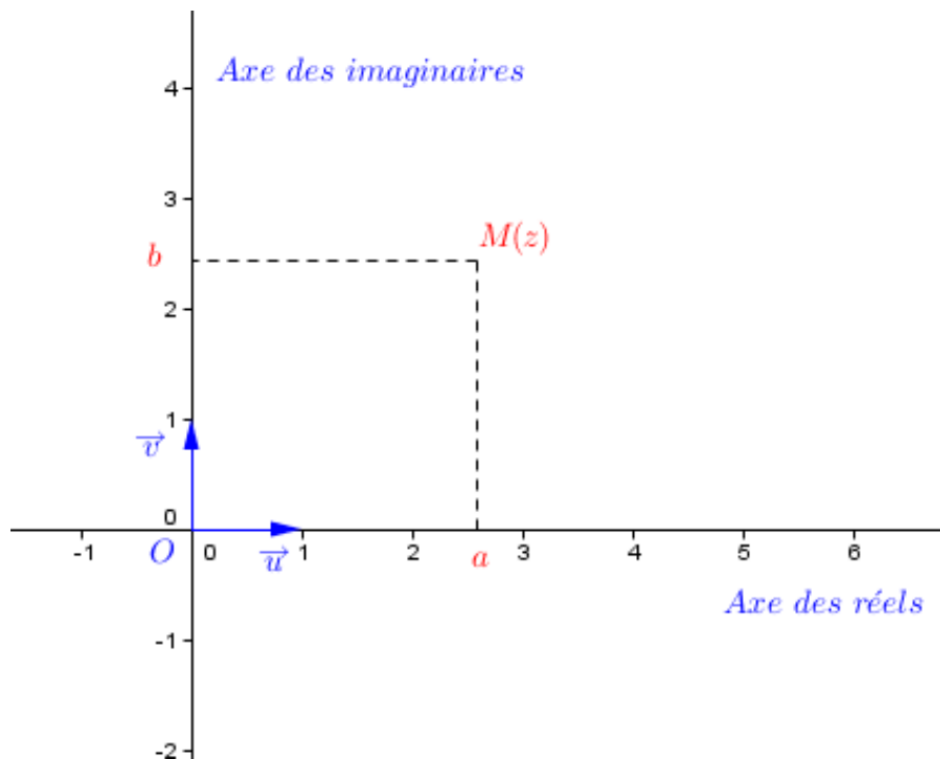
Plan complexe : On considère le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Ce plan est dit « plan complexe » dès lors que :

- A tout point $M(x; y)$ on associe le complexe $z = x + iy$.
- Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$.

Vocabulaire et notation :

- Le point $M(x; y)$ est appelé image du nombre complexe $z = x + iy$.
On le note aussi $M(z)$ et on lit « **M le point d'affixe z** ».
- Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'**affixe** du point $M(x; y)$. On le note aussi z_M .

Illustration



Remarque

L'axe des abscisses est appelé l'**axe des réels** et l'axe des ordonnées est appelé l'**axe des imaginaires purs**.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Placer les points A, B, C et D tels que : $z_A = i + i$, $z_B = 2 - 3i$, $z_C = 2$ et $z_D = -i$.

II.4 Affixe d'un vecteur, du milieu d'un segment et d'un barycentre

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $\boxed{z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z}$.
- L'affixe du point I milieu du segment $[MM']$ est $\boxed{z_I = \frac{z + z'}{2}}$.
- Si $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ alors l'affixe de G est :

$$\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$$

- Si G est l'isobarycentre des points $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ alors l'affixe du point G est :

$$\boxed{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

Exemple

Soient $A(1 + i)$, $B(2 + 3i)$ et $C(-2 + 2i)$ trois points du plan complexe. Soient I milieu de $[AB]$ et $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$.

- 1 Déterminer l'affixe du point I , l'affixe du point G et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2 Déterminer l'affixe du centre de gravité G' du triangle ABC .

II.5 Calcul dans $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ restent valables dans $\mathbb{C}$.

Somme et produit de nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. On a :

- $z + z' = a + a' + i(b + b')$ et $z - z' = a - a' + i(b - b')$.
- $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba')$

Propriétés

- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$.
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.

Inverse et quotient d'un nombre complexe

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. On a

- $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = (a + ib) \times \frac{a' - ib'}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb' + i(ba' - ab')}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$

Exercice d'application

On donne $z_1 = -4 - i$, $z_2 = 3 + 2i$ et $z_3 = x^2 - 4x + (-1 - 2y)i$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- 1 Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.
- 2 Déterminer x pour que z_3 soit imaginaire pur.
- 3 Déterminer y pour que z_3 soit réel.

Puissance entière de i

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

On constate ainsi que la puissance entière de i est périodique de période 4.

Etant donné, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, il existe $p, r \in \mathbb{N}$ tels que $n = 4p + r$ avec $0 \leq r < 4$ le reste de la division euclidienne de n par 4. D'où :

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad i^n = i^r}$$

Exemple 1

Simplifier : i^{37} ; i^{2016} ; i^{2024} ; i^{2350}

Exemple 2

Simplifier $z_1 = (1 + 2i)^4$ et $z_2 = (2 - 2i)^3$.

Indication : Développer en utilisant le triangle de Pascal

II.6 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué de z** le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

$\bar{z}$ se lit « z barre ».

Exemple

$$z_1 = 1 + 2i \implies \bar{z}_1 = 1 - 2i.$$

$$z_2 = -1 - 3i \implies \bar{z}_2 = -1 + 3i.$$

$$z_3 = i \implies \bar{z}_3 = -i.$$

$$z_4 = -2 \implies \bar{z}_4 = -2.$$

Propriétés

P1 $\bar{\bar{z}} = z$

P2 $z + \bar{z} = 2\Re(z)$

P3 $z - \bar{z} = -2\Im(z)$

P4 $z\bar{z} = [\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2$

P5 $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

P6 $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

P7 $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

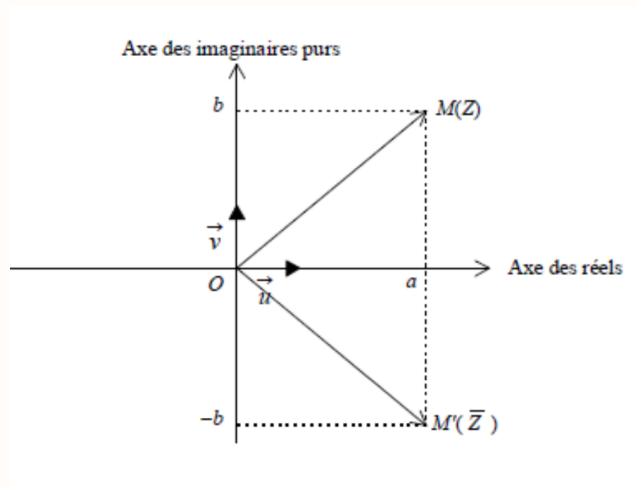
P8 $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

P9
$$\begin{cases} z \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow \bar{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} & \Leftrightarrow \bar{z} = -z \end{cases}$$

Interprétation géométrique du conjugué

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

$$z_M = a + ib \quad \text{et} \quad z_{M'} = a - ib$$



Exercice d'application

- 1** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{2+4i}; z_2 = \frac{3+2i}{1-5i} \text{ et } z_3 = \frac{1}{i}.$$

- 2** Soit

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tel que } z' = \frac{z+1}{z-1}$$

- (a) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
- (b) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- (c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
 - i) z' soit réel
 - ii) z' soit imaginaire pur.

II.7 Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ le réel positif noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Example

$$\begin{array}{ll} z = 3 + 2i & \implies |z| = \sqrt{13} \\ z = 4 - 3i & \implies |z| = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} z = i & \implies |z| = 1 \\ z = 12 & \implies |z| = 12. \end{array}$$

Interprétation géométrique du module

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit M un point d'affixe $z = a + ib$, donc $M(a; b)$. On a :

- D'une part : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- Et a'autre part : $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

Donc $|z| = OM$. D'où, le module s'interprète géométriquement comme une distance.

Remarque

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $M(z)$ quatre points du plan. On a :

$$|z_B - z_A| = AB; \quad |z - z_A| = AM; \quad \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB}; \quad \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

Exercice d'application

Soient $A(2+i)$, $B(3i)$ et $M(z)$. On pose $Z_1 = \frac{z-2-i}{z-3i}$, $Z_2 = z-2-i$ et $Z_3 = \frac{iz-2i+1}{2z-6i}$.
Interpréter géométriquement $|Z_1|$, $|Z_2|$ et $|Z_3|$.

Propriétés

☛ Pour tout nombre complexe z ,

P1 $|\bar{z}| = |z|$

P2 $|\Re(z)| \leq |z|$

P3 $|\Im(z)| \leq |z|$

P4 $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

☛ Pour tous nombres complexes z et z' ,

P4 $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

P5 $|z^n| = |z|^n$

P6 $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

P7 $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

P8 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Exercice d'application

1 Calculer le module de z dans chacun des cas suivants :

a) $z = -\sqrt{3} + i$; b) $z = 2(-\sqrt{3} + i)^4$; c) $z = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2$; d) $z = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$; e) $z = \frac{1 + i}{3 + 2i}$

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $1 - 3i$, $4 + 5i$ et $-3 + 2i$. Calculer AB, AC et BC.

3 Soit

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tel que } z' = \frac{2iz - 1}{3 - iz}$$

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$.

(b) Déterminer analytiquement puis géométriquement l'ensemble des points M tels que :

i) $|Z'| = 2$

ii) $|Z'| = 4$

III Forme trigonométrique - Forme exponentielle d'un nombre complexe

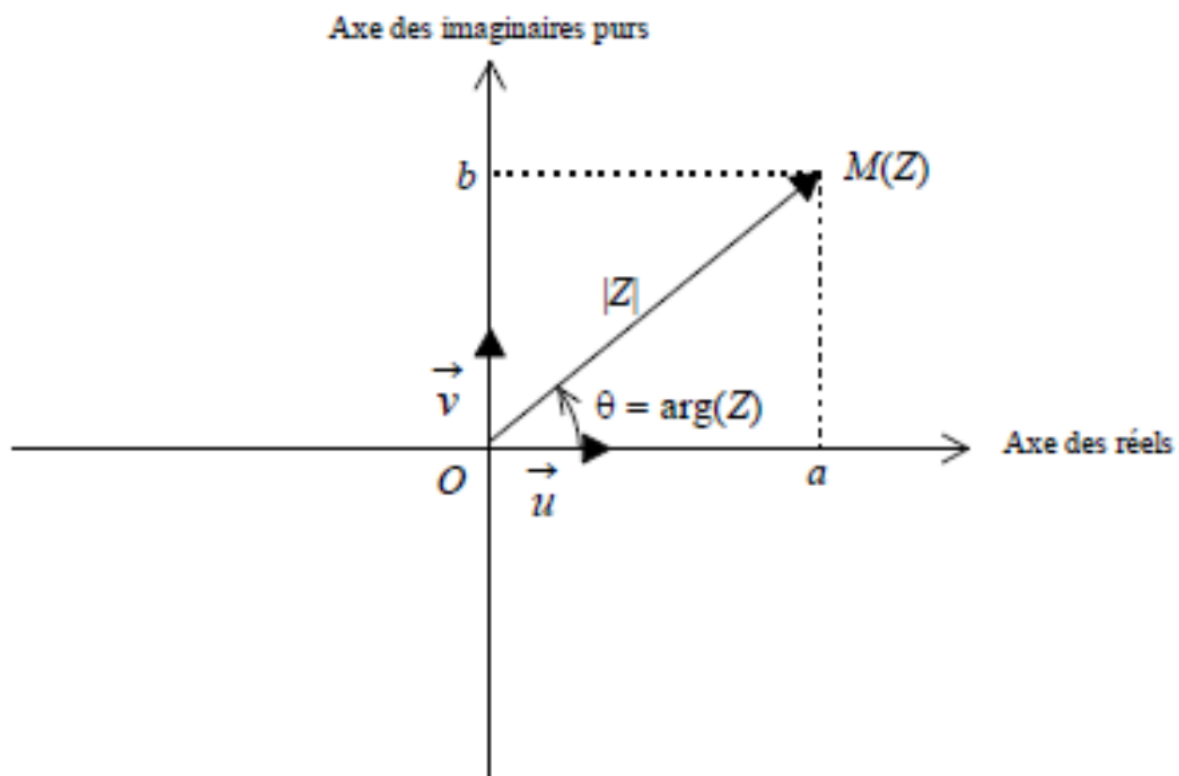
III.1 Argument d'un nombre complexe

Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit M un point du plan d'affixe z ($z \neq 0$).

On appelle argument de z noté $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{\vec{OM}})$.

On note $\arg(z) = (\vec{u}; \vec{OM})[2\pi]$.



Détermination de argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $\theta = \arg(z)$.

Le triangle OIM étant rectangle en I , on a alors :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{OI}{OM} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Re(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{IM}{OM} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

D'où :

$$\theta = \arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\Re(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{\Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

Exemple 1

Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :

$$a) z = \sqrt{3} + i; \quad b) z = -1 + i; \quad c) z = 1 - i\sqrt{3};$$

Propriété 1

Soient z et z' deux nombres complexes, on a :

$$\text{P1 } \arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$$

$$\text{P2 } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$

$$\text{P3 } \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

$$\text{P4 } \arg(z^n) = n \arg(z)[2\pi]$$

$$\text{P5 } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$$

$$\text{P6 } \arg(ib) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}, b \in \mathbb{R} \quad \text{P7 } \arg(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

Remarque

- Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments.
- Un nombre complexe nul n'a pas d'argument.
- Si $\theta = \arg(z)$, l'ensemble des arguments de z est sous la forme $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2

Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :

$$a) z = -1 - i; \quad b) z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c) z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4; \quad d) z = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}; \quad e) z = \frac{1}{2}i; \quad f) z = -5$$

Interprétation géométrique de l'argument

Soit $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $M(z)$ ($z \neq 0$) quatre points du plan. On a :

$$\bullet \arg(z) = (\vec{u}; \vec{OM})[2\pi]$$

$$\bullet \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \vec{AB})[2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}; \vec{AC})[2\pi]$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = (\vec{AM}; \vec{BM})[2\pi]$$

Exercice d'application

Soient $A(-1), B(3 - 2i), C(1 + 4i)$ et $M(z)$. On pose $Z_1 = \frac{z - 3 + 2i}{z - 1 - 4i}$ et $Z_2 = \frac{2iz - 6i + 1}{3z - 3 - 12i}$

$$\boxed{1} \text{ Déterminer une mesure de } (\vec{AB}; \vec{AC}).$$

$$\boxed{2} \text{ Interpréter géométriquement } \arg(Z_1) \text{ et } \arg(Z_2).$$

Remarque

- $z \in \mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0[\pi].$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Propriété 2

- ▶ A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$.
- ▶ $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- ▶ A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si :

$$\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) \div \left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right) \in \mathbb{R}^* \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) = \left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right) [\pi]$$

- ▶ ABCD est un parallélogramme si et seulement si $z_B - z_A = z_C - z_D$.

Remarque

- ▶ ABCD est un losange $\iff$ ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$.
- ▶ ABCD est un rectangle $\iff$ ABCD est un parallélogramme et $AC = BD$.
- ▶ ABCD est un carré $\iff$ ABCD est un parallélogramme, $(AC) \perp (BD)$ et $AC = BD$.

Propriété 3

- ABC est un triangle rectangle en A $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- ABC est triangle isocèle en A $\iff \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ ou $AB = AC$.
- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$.
- ABC est un triangle équilatéral $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice d'application 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives 2, 4, $2i$ et $2 + 2i$.
 - Placer ces points dans le repère.
 - Quelle est la nature du triangle OBD ?
- Soient E et F deux points d'affixes respectives $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.
 - Placer ces points dans le repère.
 - Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?

Exercice d'application 2

Soient $A(-2i)$, $B(2 + 2i)$, $C(-2 + 4i)$ et $D(2)$ quatre points du plan complexe.

- Placer ces points dans le repère.
- Donner le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
- En déduire la nature du triangle ABC .

- 4 Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Propriété 4 (Rappel)

- ▶ L'ensemble de points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[2\pi]$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.
- ▶ L'ensemble de points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.
- ▶ L'ensemble de points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi[\pi]$ est la droite (AB) .
- ▶ L'ensemble de points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B.
- ▶ L'ensemble de points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

Exercice d'application

Soient $A(1)$, $B(-1)$ et $M(z)$. On pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

- 1 Interpréter géométriquement $\arg(Z)$.
- 2 En déduire l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : i) $Z \in i\mathbb{R}$ ii) $Z \in \mathbb{R}$.

III.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ .

On appelle **forme trigonométrique de z** l'écriture de z sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Preuve

Soit $z = a + ib$ et $\theta = \arg(z)$. On a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \implies \begin{cases} a = |z| \cos \theta \\ b = |z| \sin \theta \end{cases}$$

D'où $z = a + ib = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Exercice d'application

On donne $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_2 = 1 + i$; $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1 Donner la forme trigonométrique de : z_1 , z_2 et Z
- 2 Donner la forme algébrique de Z .

3 En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

III.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition et Notation

Notation

On pose : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \\ \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \end{cases}$

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . On appelle **forme exponentielle de z** l'écriture de z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$.

Exercice d'application

Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3 + 3i\sqrt{3}, \quad z_2 = 2 - 2i, \quad z_3 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}, \quad z_4 = -\sqrt{3} + i, \quad z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

III.4 Formule de Moivre et Formules d'Euler

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Remarque

On déduit de cette définition la formule : $(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$.

Exemple

- 1 Calculer $(1 + i)^{2024}$.
- 2 Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

D'une manière générale, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

Propriétés

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, on a :

- ▶ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- ▶ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- ▶ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$;
- ▶ $e^0 = 1$.

Formules de linéarisation

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos \theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad (\sin \theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n$$

Remarque

Linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ revient à exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction de $\cos px$ et $\sin px$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice d'application

Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

IV Résolution d'équations

IV.1 Equations du type $Z^2 = U$, $U \in \mathbb{C}$

Méthode 1 : Méthode trigonométrique

L'équation $Z^2 = U$ admet deux solutions Z_0 et Z_1 données par :

$$Z_0 = \sqrt{|U|} e^{i\left(\frac{\arg(U)}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z_1 = -\sqrt{|U|} e^{i\left(\frac{\arg(U)}{2}\right)}$$

Méthode 2 : Méthode algébrique

Soit l'équation $Z^2 = U$. Posons $Z = x + iy$.

Résoudre l'équation $Z^2 = U$ dans $\mathbb{C}$ revient à résoudre le système suivant dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= |U| \\ x^2 - y^2 &= \Re(U) \\ 2xy &= \Im(U) \end{cases}$$

Exercice d'application

Soit l'équation $Z^2 = 1 + i$ (E).

- 1 Résoudre par la méthode trigonométrique puis la méthode algébrique l'équation (E).
- 2 En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

IV.2 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$ toute équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$.
Avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

Méthode de résolution

Soit (E) : $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Pour résoudre (E) on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

👉 1^{er} Cas : $\Delta \in \mathbb{R}$;

▶ Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution double (réelle) : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

▶ Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

👉 2^{ème} Cas : $\Delta \in \mathbb{C}$ et $\Delta \notin \mathbb{R}$ ($\Delta = a + ib$); Dans ce cas on cherche une racine carrée de Δ .

On pose $\delta = x + iy$ / $\delta^2 = \Delta$ (on détermine x et y à travers cette équation).

Les racines de (E) sont sous la forme : $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

Exercice d'application

Résoudre $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - 5z + 9 = 0$; 2) $z^2 - z - 2 = 0$; 3) $z^2 - 6z + 9 = 0$; 4) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

IV.3 Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$

Exemple 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$

- 1 Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur z_0 que l'on déterminera.
- 2 Résoudre (E).

Exemple 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$

- 1 Déterminer la solution réelle de (E') .
- 2 Résoudre (E') .

V Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

V.1 Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Détermination des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Cherchons les solutions sous forme exponentielle.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| &= 1 \\ \arg(z^n) &= \arg(1) = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n &= 1 \\ n \arg(z) &= 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| &= 1 \\ \arg(z) &= \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

D'où les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont sous la forme :

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et placer dans le plan complexe les points images des solutions.

1) $z^3 = 3$ et 2) $z^4 = 1$

Remarque

- On a exactement n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
- Pour $n \geq 0$ la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle.
- Les points images $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ des solutions z_k sont des sommets d'un polygone régulier à n cotés.

V.2 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Définition

Soit n un entier naturel non nul et U un nombre complexe différent de 1. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de U tout nombre complexe z tel que $z^n = U$.

Détermination des racines $n^{\text{ième}}$ de U .

Soit à résoudre l'équation $(E) : z^n = U, \quad U \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$

👉 1^{er} Cas : Si on connaît une racine z_0 de (E) alors on aura $z_0^n = U$, donc :

$$\begin{cases} z^n = U \\ z_0^n = U \end{cases} \Rightarrow z^n = z_0^n \Rightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$

En posant $Z = \frac{z}{z_0}$, on a :

$$\begin{aligned} Z^n = 1 &\Leftrightarrow Z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_k}{z_0} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow z_k = z_0 e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Donc si z_0 est une solution particulière de l'équation $z^n = U$ alors les solutions de l'équation $z^n = U$ s'obtiennent en multipliant z_0 par les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

👉 2^{ème} Cas : Cas général. Soit $\theta = \arg(U)$, on a : $U = |U|e^{i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} z^n = U &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |U| \\ \arg z^n = \arg U [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |U| \\ n \arg z = \arg U [2\pi] = \theta + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|U|} \\ \arg z = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les solutions de (E) sont sous la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{|U|} e^{i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, \quad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$$

Remarque

Les points images $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ des solutions z_k sont de sommets d'un polygone régulier à n cotés sur le cercle $\mathcal{C} \left(O, \sqrt[n]{|U|} \right)$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^3 = i$ et $z^5 = i$.

Exercice d'application 1 (BAC 2005 S₂)

Soit $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

- 1 Montrer que $z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ est une solution de (E) .
- 2 En déduire les autres solutions de (E) .
- 3 Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique des solutions de (E) .
- 4 En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice d'application 2 (BAC 2007 S₂)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$.

- 1
 - (a) Déterminer la solution réelle de (E) .
 - (b) Montrer que i est une solution de (E) .
 - (c) Déterminer la troisième solution de (E) .
- 2 Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et $2 + i$.
 - (a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - (b) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 1:

- 1 (a) Qst
 (b) Qst
- 2 (a) Qst
 (b) Qst
 (c) Qst
- 3 (a) Qst
 (b) Qst

Exercice 2:

- 1 (a) Qst
 (b) Qst
- 2 (a) Qst
 (b) Qst
 (c) Qst
- 3 (a) Qst
 (b) Qst

Exercice 3:

- 1 Qst
- 2 Qst
- 3 Qst
- 4 Qst
- 5 Qst

Exercice 4:

- 1 Qst
- 2 Qst
- 3 Qst
- 4 Qst
- 5 Qst